KORESPONDENCYJNY KURS PRZYGOTOWAWCZY Z MATEMATYKI

PRACA KONTROLNA nr 1

październik 1999 r

1. Stop składa się z 40% srebra próby 0,6, 30% srebra próby 0,7 oraz 1 kg srebra próby 0,8. Jaka jest waga i jaka jest próba tego stopu?

2. Rozwiązać równanie
$$3^x + 1 + 3^{-x} + \ldots = 4,$$
którego lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

3. W trójkącie ABC znane są wierzchołki $A(0,0)$ oraz $B(4,-1)$. Wiadomo, że w punkcie $H(3,2)$ przecinają się proste zawierające wysokości tego trójkąta. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka C. Wykonać odpowiedni rysunek.

4. Rozwiązać równanie
$$\cos 4x = \sin 3x.$$

5. Wykonać staranny wykres funkcji
$$f(x) = |\log_2 (x-2)^2|.$$

6. Rozwiązać nierówność
$$\frac{1}{x^2} \geqslant \frac{1}{x+6}.$$

7. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość p, a krawędź boczna długość $2p$. Obliczyć cosinus kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

8. Wyznaczyć równania wszystkich prostych stycznych do wykresu funkcji $y = \frac{2x+10}{x+4}$, które są równoległe do prostej stycznej do wykresu funkcji $y = \sqrt{1-x}$ w punkcie $x = 0$. Rozwiązanie zilustrować rysunkiem.

PRACA KONTROLNA nr 2

listopad 1999r

1. Udowodnić, że dla każdego n naturalnego wielomian $x^{4n-2}+1$ jest podzielny przez trójmian kwadratowy x^2+1.

2. W równoramienny trójkąt prostokątny o polu powierzchni $S = 10\ \mathrm{cm}^2$ wpisano prostokąty w ten sposób, że jeden z jego boków leży na przeciwprostokątnej, a pozostałe wierzchołki znajdują się na przyprostokątnych. Znaleźć ten z prostokątów, który ma najkrótszą przekątną i obliczyć jej długość.

3. Rozwiązać nierówność
$$\log_{125} 3 \cdot \log_x 5 + \log_9 8 \cdot \log_4 x > 1.$$

4. Znaleźć wszystkie wartości parametru p, dla których wykres funkcji $y = x^2+4x+3$ leży nad prostą $y = px+1$.

5. Zbadać liczbę rozwiązań równania
$$||x+5|-1| = m$$
w zależności od parametru m.

6. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x^2+y^2 = 50 \\ (x-2)(y+2) = -9 \end{cases}.$$
Podać interpretację geometryczną tego układu i wykonać odpowiedni rysunek.

7. Wyznaczyć na osi x-ów punkty A i B, z których okrąg $x^2+y^2-4x+2y = 20$ widać pod kątem prostym tzn. styczne do okręgu wychodzące z każdego z tych punktów są do siebie prostopadłe. Obliczyć pole figury ograniczonej stycznymi do okręgu przechodzącymi przez punkty A i B. Wykonać staranny rysunek.

8. W przedziale $[0, 2\pi]$ rozwiązać równanie
$$1 - \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x - \mathrm{tg}^6 x + \ldots = \sin^2 3x.$$

PRACA KONTROLNA nr 3

grudzień 1999r

1. Nie korzystając z metod rachunku różniczkowego wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji
$$y = \sqrt{2 + \sqrt{x} - x}.$$

2. Jednym z wierzchołków rombu o polu 20 cm^2 jest $A(6,3)$, a jedna z przekątnych zawiera się w prostej o równaniu $2x + y = 5$. Wyznaczyć równania prostych, w których zawierają się boki $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$.

3. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić prawdziwość wzoru
$$3(1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = \frac{n^3(n+1)^3}{2}.$$

4. Ostrosłup prawidłowy trójkątny ma pole powierzchni całkowitej $P = 12\sqrt{3}\text{cm}^2$, a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy $\alpha = 60^0$. Obliczyć objętość tego ostrosłupa.

5. Wśród trójkątów równoramiennych wpisanych w koło o promieniu R znaleźć ten, który ma największe pole.

6. Przeprowadzić badanie przebiegu funkcji $y = \frac{1}{2}x^2\sqrt{5 - 2x}$ i wykonać jej staranny wykres.

7. W trapezie równoramiennym dane są ramię r, kąt ostry przy podstawie α oraz suma długości przekątnej i dłuższej podstawy wynosząca d. Obliczyć pole trapezu oraz promień okręgu opisanego na tym trapezie. Ustalić warunki istnienia rozwiązania. Następnie podstawić $\alpha = 30^0$, $r = \sqrt{3}$ cm i $d = 6$ cm.

8. Rozwiązać nierówność
$$|\cos x + \sqrt{3}\sin x| \leqslant \sqrt{2}, \quad x \in [0, 3\pi].$$

PRACA KONTROLNA nr 4

styczeń 2000r

1. Rozwiązać równanie $16+19+22+\cdots+x=2000$, którego lewa strona jest sumą pewnej liczby kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

2. Spośród cyfr 0,1,$\cdots$,9 losujemy bez zwracania pięć cyfr. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że z otrzymanych cyfr można utworzyć liczbę podzielną przez 5.

3. Zbadać, czy istnieje pochodna funkcji $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$ w punkcie $x=0$. Wynik zilustrować na wykresie funkcji $f(x)$.

4. Udowodnić, że dwusieczne kątów wewnętrznych równoległoboku tworzą prostokąt, którego przekątna ma długość równą różnicy długości sąsiednich boków równoległoboku.

5. Rozwiązać układ nierówności

$$\begin{cases} x+y \leqslant 3 \\ \log_y(2^{x+1}+32) \leqslant 2\log_y(8-2^x) \end{cases}$$

i zaznaczyć zbiór jego rozwiązań na płaszczyźnie.

6. Wyznaczyć równanie zbioru wszystkich punktów płaszczyzny Oxy będących środkami okręgów stycznych wewnętrznie do okręgu $x^2+y^2=25$ i równocześnie stycznych zewnętrznie do okręgu $(x+2)^2+y^2=1$. Jaką linię przedstawia znalezione równanie? Sporządzić staranny rysunek.

7. Zbadać iloczyn pierwiastków rzeczywistych równania

$$m^2x^2+8mx+4m-4=0$$

jako funkcję parametru m. Sporządzić wykres tej funkcji.

8. Podstawą czworościanu ABCD jest trójkąt równoboczny ABC o boku a, ściana boczna BCD jest trójkątem równoramiennym prostopadłym do płaszczyzny podstawy, a kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku A jest równy α. Obliczyć pole powierzchni kuli opisanej na tym czworościanie.

PRACA KONTROLNA nr 5

luty 2000r

1. Narysować na płaszczyźnie zbiór A wszystkich punktów (x, y), których współrzędne spełniają warunki
$$||x|-y| \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 2,$$
i znaleźć punkt zbioru A leżący najbliżej punktu $P(0,4)$.

2. Obliczyć $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ wiedząc, że $\sin 2\alpha = \frac{1}{4}$ oraz $\alpha \in (0, 2\pi)$.

3. Rozważmy rodzinę prostych przechodzących przez punkt $P(0,-1)$ i przecinających parabolę $y = \frac{1}{4}x^2$ w dwóch punktach. Wyznaczyć równanie środków powstałych w ten sposób cięciw paraboli. Sporządzić rysunek i opisać otrzymaną krzywą.

4. Rozwiązać równanie
$$\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+2}} - \sqrt{x-\sqrt{x^2-x+2}} = 4.$$

5. Dwóch strzelców wykonuje strzelanie. Pierwszy trafia do celu z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ w każdym strzale i wykonuje 4 strzały, a drugi trafia z prawdpodobieństwem $\frac{1}{3}$ i wykonuje 8 strzałów. Który ze strzelców ma większe prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej trzech trafień do celu, jeśli wyniki kolejnych strzałów są wzajemnie niezależne?

6. Do naczynia w kształcie walca o promieniu podstawy R wrzucono trzy jednakowe kulki o promieniu r, przy czym $R < 2r < 2R$. Okazało się, że płaska pokrywa naczynia jest styczna do kulki znajdującej się najwyżej w naczyniu. Obliczyć wysokość naczynia.

7. Dla jakich wartości parametru m funkcja
$$f(x) = \frac{x^3}{mx^2+6x+m}$$
jest określona i rosnąca na całej prostej rzeczywistej.

8. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(-2,1)$, $B(-1,-6)$, $C(2,5)$. Posługując się rachunkiem wektorowym obliczyć cosinus kąta pomiędzy dwusieczną kąta A i środkową boku $\overline{BC}$. Wykonać rysunek.

PRACA KONTROLNA nr 6

marzec 2000r

1. Rozwiązać równanie
$$x^{\log_2(2x-1)+\log_2(x+2)} = \frac{1}{x^2}.$$

2. Styczna do okręgu $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 5$ w punkcie M(-1,2), prosta l o równaniu $24x + 5y - 12 = 0$ oraz oś Ox tworzą trójkąt. Obliczyć pole tego trójkąta i wykonać rysunek.

3. Udowodnić prawdziwość tożsamości
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2},$$
gdzie α, β, γ są kątami ostrymi, których suma wynosi $\frac{\pi}{2}$.

4. Długości krawędzi prostopadłościanu o objętości $V = 8$ tworzą ciąg geometryczny, a stosunek długości przekątnej prostopadłościanu do najdłuższej z przekątnych ścian tej bryły wynosi $\frac{3}{4}\sqrt{2}$. Obliczyć pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu.

5. Z urny zawierającej siedem kul czarnych i trzy białe wybrano losowo trzy kule i przełożono do drugiej, pustej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z drugiej urny?

6. Prostokąt obraca się wokół swojej przekątnej. Obliczyć objętość powstałej bryły, jeśli przekątna ma długość d, a kąt pomiędzy przekątną, a dłuższym bokiem ma miarę α. Wykonać odpowiedni rysunek.

7. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji
$$f(x) = x^{5/2} - 10x^{3/2} + 40x^{1/2}$$
w przedziale $[1,5]$.

8. Stosunek promienia okręgu wpisanego do promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy k. Obliczyć w jakim stosunku środek okręgu wpisanego w ten trójkąt dzieli dwusieczną kąta prostego. Określić dziedzinę dla parametru k.

PRACA KONTROLNA nr 7

kwiecień 2000r

1. Rozwiązać nierówność
$$|9^x - 2| < 3^{x+1} - 2.$$

2. Wyznaczyć równanie krzywej będącej obrazem okręgu $(x+1)^2 + (y-6)^2 = 4$ w powinowactwie prostokątnym o osi Ox i stosunku $k = \frac{1}{2}$. Obliczyć pole figury ograniczonej tą krzywą. Wykonać staranny rysunek.

3. Pewien zbiór zawiera dokładnie 67 podzbiorów o **co najwyżej** dwóch elementach. Ile podzbiorów siedmioelementowych zawiera ten zbiór ?

4. Na kole o promieniu R opisano trapez o kątach przy dłuższej podstawie 15^0 i 45^0. Obliczyć stosunek pola koła do pola tego trapezu.

5. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} mx - 6y = 3 \\ 2x + (m-7)y = m-1 \end{cases}$$
w zależności od parametru rzeczywistego m. Podać wszystkie rozwiązania (i odpowiadające im wartości parametru m), dla których x jest równe y.

6. Rozwiązać nierówność
$$\sin 2x < \sin x$$
w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Rozwiązanie zilustrować starannym wykresem.

7. Ostrosłup przecięto na trzy części dwiema płaszczyznami równoległymi do jego podstawy. Pierwsza płaszczyzna jest położona w odległości $d_1 = 2$ cm, a druga w odległości $d_2 = 3$ cm od podstawy. Pola przekrojów ostrosłupa tymi płaszczyznami równe są odpowiednio $S_1 = 25\ \mathrm{cm}^2$ oraz $S_2 = 16\ \mathrm{cm}^2$. Obliczyć objętość tego ostrosłupa oraz objętość najmniejszej części.

8. Trylogię składającą się z dwóch powieści dwutomowych oraz jednej jednotomowej ustawiono przypadkowo na półce. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że tomy
a) obydwu, b) co najmniej jednej z dwutomowych powieści znajdują się obok siebie i przy tym tom I z lewej, a tom II z prawej strony.