

## PRACA KONTROLNA nr 1

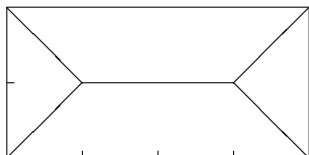
październik 2001r

1. Dwaj rowerzyści wyruszyli jednocześnie w drogę, jeden z A do B, drugi z B do A i spotkali się po jednej godzinie. Pierwszy z nich przebywał w ciągu godziny o 3 km więcej niż drugi i przyjechał do celu o 27 minut wcześniej niż drugi. Jakie były prędkości obu rowerzystów i jaka jest odległość AB ?

2. Rozwiązać nierówność:

$$\sqrt{x^2 - 3} > \frac{2}{x}.$$

3. Rysunek przedstawia dach budynku w rzucie poziomym. Każda z płaszczyzn nachylona jest do płaszczyzny poziomej pod kątem  $30^\circ$ . Długość dachu wynosi 18 m, a szerokość 9 m. Obliczyć pole powierzchni dachu oraz całkowitą kubaturę strychu w tym budynku.



4. Pewna firma przeprowadza co kwartał regulację płac dla swoich pracowników rewaloryzując je zgodnie ze wskaźnikiem inflacji, który jest stały i wynosi 1,5% kwartalnie, oraz doliczając stałą kwotę podwyżki 16 złp. W styczniu 2001 pan Kowalski otrzymał wynagrodzenie 1600 złp. Jaką pensję otrzyma w kwietniu 2002? Wyznaczyć wzór ogólny na pensję  $w_n$  pana Kowalskiego w n-tym kwartale przyjmując, że  $w_1 = 1600$  jest płacą w pierwszym kwartale 2001. Obliczyć średnią miesięczną płacę pana Kowalskiego w 2002 roku.

5. Wyznaczyć funkcję odwrotną do  $f(x) = x^3$ ,  $x \in R$ . Korzystając z tego wykonać staranny wykres funkcji  $h(x) = \sqrt[3]{(|x| - 1)} + 1$ .

6. Rozwiązać równanie:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 4x} = 1.$$

7. Dany jest trójkąt o wierzchołkach  $A(-2, 1)$ ,  $B(-1, -6)$ ,  $C(2, 5)$ . Posługując się rachunkiem wektorowym obliczyć cosinus kąta pomiędzy dwusieczną kąta  $A$  i środkową boku  $\overline{BC}$ . Wykonać rysunek.

8. Przeprowadzić badanie przebiegu i wykonać wykres funkcji

$$f(x) = x + \frac{x}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2} + \frac{x}{(x-1)^3} + \dots$$

---

## PRACA KONTROLNA nr 2

listopad 2001r

1. Cena 1 l paliwa została **zmniejszona** o 15%. Po dwóch tygodniach dokonano kolejnej zmiany ceny paliwa **zwiększając** ją o 15%. O ile procent końcowa cena paliwa różni się od początkowej?

2. Wyznaczyć i narysować zbiór złożony z punktów  $(x, y)$  płaszczyzny spełniających warunek

$$x^2 + y^2 = 8|x| + 6|y|.$$

3. Wysokość ostrosłupa trójkątnego prawidłowego wynosi  $h$ , a kąt między wysokościami ścian bocznych jest równy  $2\alpha$ . Obliczyć pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Sporządzić odpowiednie rysunki.

4. Z arkusza blachy w kształcie równoległoboku o bokach 30 cm i 60 cm i kącie ostrym  $60^\circ$  należy odciąć dwa przeciwległe trójkątne naroża tak, aby powstał romb o możliwie największym polu. Określić przez który punkt dłuższego boku należy przeprowadzić cięcie oraz obliczyć kąt ostry otrzymanego rombu zaokrąglając wynik do jednej minuty katowej.

5. Rozwiązać równanie

$$2^{\log_{\sqrt{2}} x} = (\sqrt{2})^{\log_x 2}.$$

6. Wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji

$$f(x) = \frac{4}{\sin x + 2 \cos x + 3}.$$

7. Znaleźć wszystkie wartości parametru  $p$ , dla których równanie

$$px^4 - 4x^2 + p + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania.

8. Wyznaczyć tangens kąta, pod którym styczna do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{8}{x^2+3}$  w punkcie  $A(3, \frac{2}{3})$  **przecina** wykres tej funkcji.

---

## PRACA KONTROLNA nr 3

grudzień 2001r

1. Dla jakich wartości  $\sin x$  liczby  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin 2x$  (w podanym porządku) są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznaczyć czwarte wyrazy tych ciągów.
2. W pewnych zawodach sportowych startuje 16 drużyn. W eliminacjach są one losowo dzielone na 4 grupy po 4 drużyny każda grupa. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że trzy zwycięskie drużyny z poprzednich zawodów znajdą się każda w innej grupie.
3. Nie wykonując dzielenia udowodnić, że wielomian  $(x^2 + x + 1)^3 - x^6 - x^3 - 1$  dzieli się bez reszty przez trójmian  $(x + 1)^2$ .
4. Wyznaczyć równanie okręgu o promieniu  $r$  stycznego do paraboli  $y = x^2$  w dwóch punktach. Dla jakiego  $r$  zadanie ma rozwiązanie? Sporządzić rysunek przyjmując  $r = 3/2$ .
5. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić prawdziwość wzoru

$$\binom{2}{2} - \binom{3}{2} + \binom{4}{2} - \binom{5}{2} + \dots + \binom{2n}{2} = n^2, \quad n \geq 1.$$

6. Rozwiązać nierówność:

$$\log_x(1 - 6x^2) \geq 1.$$

7. Środek  $S$  okręgu wpisanego w trapez  $ABCD$  jest odległy od wierzchołka  $B$  o  $SB = d$ , a krótsze ramię  $\overline{BC}$  ma długość  $BC = c$ . Punkt styczności okręgu z krótszą podstawą dzieli ją w stosunku 1:2. Obliczyć pole tego trapezu. Wykonać rysunek dla  $c=5$  i  $d=4$ .
8. Wszystkie ściany równoległościanu są rombami o boku  $a$  i kącie ostrym  $\beta$ . Obliczyć objętość tego równoległościanu. Sporządzić rysunek. Obliczenia poprzeć stosownym dowodem.

---

## PRACA KONTROLNA nr 4

styczeń 2002r

1. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{2^n + 2^{n+1} + \dots + 2^{2n}}{2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n}}.$$

2. Wyznaczyć równanie prostej prostopadłej do danej  $2x + 3y + 3 = 0$  i leżącej w równej odległości od dwóch danych punktów  $A(-1, 1)$  i  $B(3, 3)$ . Sporządzić rysunek.
3. Tworząca stożka ma długość  $l$  i widać ją ze środka kuli wpisanej w ten stożek pod kątem  $\alpha$ . Obliczyć objętość i kąt rozwarcia stożka. Określić dziedzinę kąta  $\alpha$ .
4. Bolek kupił jeden długopis i  $k$  zeszytów i zapłacił  $k$  zł i 50 gr, a Lolek kupił  $k$  długopisów i 4 zeszyty i zapłacił  $2,5k$  zł. Wyznaczyć cenę długopisu i zeszytu w zależności od parametru  $k$ . Znaleźć wszystkie możliwe wartości tych cen wiedząc, że zeszyt kosztuje nie mniej niż 50 gr, długopis jest droższy od zeszytu, a ceny obydwu artykułów wyrażają się w pełnych złotych i dziesiątkach groszy.
5. Rozwiązać nierówność:

$$\operatorname{tg}^3 x \geq \sin 2x.$$

6. Żarówki są sprzedawane w opakowaniach po 6 sztuk. Prawdopodobieństwo, że pojedyncza żarówka jest sprawna wynosi  $\frac{2}{3}$ . Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w jednym opakowaniu znajdą się co najmniej 4 sprawne żarówki. O ile wzrośnie to prawdopodobieństwo, jeśli jedna, wylosowana z opakowania żarówka okazała się sprawna.
7. Prosta styczna w punkcie  $P$  do okręgu o promieniu 2 i półprosta wychodząca ze środka okręgu mająca z okręgiem punkt wspólny  $S$  przecinają się w punkcie  $A$  pod kątem  $60^\circ$ . Znaleźć promień okręgu stycznego do odcinków  $AP$ ,  $AS$  i łuku  $PS$ . Wykonać **odpowiedni** rysunek.
8. W ostrosłupie prawidłowym, którego podstawą jest kwadrat, pole każdej z pięciu ścian wynosi 1. Ostrosłup ten ścięto płaszczyzną równoległą do podstawy tak, aby uzyskać maksymalny stosunek objętości do pola powierzchni całkowitej. Obliczyć pole powierzchni całkowitej otrzymanego ostrosłupa ściętego. Rozwiązanie zilustrować rysunkiem.

---

## PRACA KONTROLNA nr 5

luty 2002r

1. W czworokącie  $ABCD$  dane są wektory  $\vec{AB} = (2, -1)$ ,  $\vec{BC} = (3, 3)$ ,  $\vec{CD} = (-4, 1)$ . Punkty  $K$  i  $M$  są środkami boków  $\overline{CD}$  oraz  $\overline{AD}$ . Posługując się rachunkiem wektorowym obliczyć pole trójkąta  $KMB$ . Wykonać rysunek.

2. Krawędzie oraz przekątna prostopadłościanu tworzą cztery kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Wyznaczyć sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu, jeśli przekątna ma długość 7 cm.

3. Na płaszczyźnie  $Oxy$  dane są zbiory:

$$A = \{(x, y) : y \leq \sqrt{5x - x^2}\}, \quad B_s = \{(x, y) : 3x + 4y = s\}.$$

Dla jakich wartości parametru  $s$  zbiór  $A \cap B_s$  nie jest pusty? Sporządzić rysunek.

4. Działka gruntu ma kształt trapezu o bokach 20 m, 30 m, 40 m i 60 m. Właściciel działki twierdzi, że pole jego działki wynosi ponad 11 arów. Czy właściciel ma rację? Jeśli tak, to narysować plan działki w skali 1:1000 i podać dokładną wartość jej pola.

5. Dane jest równanie kwadratowe z parametrem  $m$ :

$$(m + 2)x^2 + 4\sqrt{m}x + (m - 3) = 0.$$

Dla jakiej wartości parametru  $m$  kwadrat różnicy pierwiastków rzeczywistych tego równania jest największy. Podać tę największą wartość.

6. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić, że dla każdego  $n \geq 2$  liczba  $2^{2^n} - 6$  jest podzielna przez 10.

7. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4 \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{dla } x, y \in [-\pi, \pi].$$

8. Równoramienne trójkąt prostokątny  $ABC$  zgięto wzdłuż środkowej  $\overline{CD}$  wychodzącej z wierzchołka kąta prostego  $C$  tak, aby obie połowy tego trójkąta utworzyły kąt  $60^\circ$ . Obliczyć sinusy wszystkich kątów dwuściennych otrzymanego czworościanu  $ABCD$ . Wykonać odpowiednie rysunki i uzasadnić obliczenia.

---

## PRACA KONTROLNA nr 6

marzec 2002r

1. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru rzeczywistego  $m$ , dla których osią symetrii wykresu funkcji  $p(x) = (m^2 - 2m)x^2 - (2m - 4)x + 3$  jest prosta  $x = m$ . Wykonać rysunek.
2. Z kuli o środku w zerze i promieniu  $R$  wycięto ósmą jej część trzema płaszczyznami układu współrzędnych. W tak otrzymaną bryłę wpisano kulę. Obliczyć stosunek pola powierzchni tej kuli do pola powierzchni bryły.
3. W trzech pustych urnach K, L, M rozmieszczamy losowo 4 różne kule. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że żadna z urn K i L **nie** pozostanie pusta.
4. Dane są punkty  $A(2, 6)$ ,  $B(-2, 6)$  i  $C(0, 0)$ , Wyznaczyć równanie linii zawierającej **wszystkie punkty trójkąta ABC**, dla których suma kwadratów ich odległości od trzech boków jest stała i wynosi 9. Sporządzić rysunek.
5. Sporządzić dokładny wykres i napisać równania asymptot funkcji

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x|x-1|}$$

nie przeprowadzając badania jej przebiegu.

6. Rozwiązać nierówność:

$$|x|^{2x-1} \leq \frac{1}{x^2}.$$

7. Styczna do wykresu funkcji  $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}$  w punkcie  $A(x_0, f(x_0))$  przecina oś  $x$  w punkcie  $P$ , a oś  $y$  w punkcie  $Q$  tak, że  $OP = OQ$ . Wyznaczyć  $x_0$ .
8. Trójkąt równoboczny o boku  $a$  przecięto prostą  $l$  na dwie figury, których stosunek pól jest równy 1:5. Prosta ta przecina bok  $\overline{AC}$  w punkcie  $D$  pod kątem  $15^\circ$ , a bok  $\overline{AB}$  w punkcie  $E$ . Wykazać, że  $AD + AE = a$ .

---

## PRACA KONTROLNA nr 7

kwiecień 2002r

1. Sześcian o krawędzi długości 3 cm ma taką samą objętość jak dwa sześciany, których suma długości obydwu krawędzi wynosi 4 cm. O ile  $\text{cm}^2$  pole powierzchni dużego sześcianu jest mniejsze od sumy pól powierzchni dwóch mniejszych sześcianów.
2. Obliczyć tangens kąta utworzonego przez przekątne czworokąta o wierzchołkach **A(1,1)**, **B(2,0)**, **C(2,4)**, **D(0,6)**. Rozwiązanie zilustrować rysunkiem.
3. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg, a w okrąg ten wpisano podobny trójkąt prostokątny. Wyznaczyć cosinusy kątów ostrych trójkąta, jeśli wiadomo, że stosunek pól obu trójkątów wynosi 9.
4. Wykazać, że ciąg  $a_n = \sqrt{n(n+1)} - n$  jest rosnący. Obliczyć jego granicę.
5. Rozwiązać nierówność:

$$2 \cos^2 \frac{x}{4} > 1.$$

6. Rozwiązać równanie

$$\log_2(1-x) + \log_4(x+4) = \log_4(x^3 - x^2 - 3x + 5) + \frac{1}{2}$$

nie wyznaczając dziedziny w sposób jawny.

7. W kulę o promieniu  $R$  wpisano stożek o największej objętości. Wyznaczyć promień podstawy  $r$  i wysokość  $h$  tego stożka. Sporządzić rysunek.
8. Znaleźć równania wszystkich prostych, które są styczne jednocześnie do krzywych

$$y = -x^2, \quad y = x^2 - 8x + 18.$$

Sporządzić rysunek.