KORESPONDENCYJNY KURS Z MATEMATYKI

PRACA KONTROLNA nr 1

październik 2002r

1. Narysować wykres funkcji $y = 4 + 2|x| - x^2$. Korzystając z tego wykresu określić liczbę rozwiązań równania $4+2|x|-x^2 = p$ w zależności od parametru rzeczywistego p.

2. Pompa napełniająca pusty basen w pierwszej minucie pracy miała wydajność 0,2 m^3/s, a w każdej kolejnej minucie jej wydajność zwiększano o 0,01 m^3/s. Połowa basenu została napełniona po $2n$ minutach, a cały basen po kolejnych n minutach, gdzie n jest liczbą naturalną. Wyznaczyć czas napełniania basenu oraz jego pojemność.

3. Stożek ścięty jest opisany na kuli o promieniu $r = 2$ cm. Objętość kuli stanowi 25% objętości stożka. Wyznaczyć średnice podstaw i długość tworzącej tego stożka.

4. W trójkącie ABC dane są promień okręgu opisanego R, kąt $\angle A = \alpha$ oraz $AB = \frac{8}{5}R$. Obliczyć pole tego trójkąta.

5. Rozwiązać nierówność:
$$(\sqrt{x})^{\log_8 x} \geqslant \sqrt[3]{16x}.$$

6. W czworokącie $ABCD$ odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{BD}$ są prostopadłe, $AD = 2AB = a$ oraz $\vec{AC} = \frac{5}{3}\,\vec{AB} + \frac{1}{3}\,\vec{AD}$. Wyznaczyć cosinus kąta $\angle BCD = \alpha$ oraz obwód czworokąta $ABCD$. Sporządzić rysunek.

7. Rozwiązać równanie:
$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \sqrt{8}.$$

8. Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $y = \frac{1}{x^2}$ w punkcie $P(x_0, y_0)$, $x_0 > 0$, takim, że odcinek tej stycznej zawarty w I ćwiartce układu współrzędnych jest najkrótszy. Rozwiązanie zilustrować stosownym wykresem.

PRACA KONTROLNA nr 2

listopad 2002r

1. Czy liczby różnych 'słów', jakie można utworzyć zmieniając kolejność liter w 'słowach' TANATAN i AKABARA, są takie same? Uzasadnić odpowiedź. Przez 'słowo' rozumiemy tutaj dowolny ciąg liter.

2. Reszta z dzielenia wielomianu x^3+px^2-x+q przez trójmian $(x+2)^2$ wynosi $-x+1$. Wyznaczyć pierwiastki tego wielomianu.

3. Figura na rysunku poniżej składa się z łuków BC, CA okręgów o promieniu a i środkach odpowiednio w punktach A, B, oraz z odcinka $\overline{AB}$ o długości a. Obliczyć promień okręgu stycznego do obu łuków oraz do odcinka $\overline{AB}$.

4. Podstawą pryzmy przedstawionej na rysunku poniżej jest prostokąt $ABCD$, którego bok $\overline{AB}$ ma długość a, a bok $\overline{BC}$ długość b, gdzie $a > b$. Wszystkie ściany boczne pryzmy są nachylone pod kątem α do płaszczyzny podstawy. Obliczyć objętość tej pryzmy.

5. Rozwiązać nierówność
$$\frac{2}{x} < \sqrt{5-x^2}.$$
Rozwiązanie zilustrować wykresami funkcji występujących po obu stronach nierówności. Zaznaczyć na rysunku otrzymany zbiór rozwiązań.

6. Ciąg (a_n) jest określony warunkami $a_1 = 4, a_{n+1} = 1+2\sqrt{a_n},\ n \geqslant 1$. Stosując zasadę indukcji matematycznej wykazać, że ciąg (a_n) jest rosnący oraz dla $n \geqslant 1$ spełniona jest nierówność: $4 \leqslant a_n < 6$.

7. Na krzywej o równaniu $y = \sqrt{x}$ znaleźć miejsce, które jest położone najbliżej punktu $P(0,3)$. Sporządzić rysunek.

8. Wykazać, że dla każdej wartości parametru $\alpha \in R$ równanie kwadratowe
$$3x^2 + 4x\sin\alpha - \cos 2\alpha = 0$$
ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste. Wyznaczyć te wartości parametru α, dla których oba pierwiastki leżą w przedziale $(0,1)$.

PRACA KONTROLNA nr 3

grudzień 2002r

1. Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego zmniejszy się o 25%, jeśli wykreślimy z niej składniki o numerach parzystych niepodzielnych przez 4. Obliczyć sumę wszystkich wyrazów tego ciągu wiedząc, że jego drugi wyraz wynosi 1.

2. Z kompletu 28 kości do gry w domino wylosowano dwie kości (bez zwracania). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że kości *pasują* do siebie tzn. na jednym z pól obu kości występuje ta sama liczba oczek.

3. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x & +2y & = & 3 \\ 5x & +my & = & m \end{cases}$$
w zależności od parametru rzeczywistego m. Wyznaczyć i narysować zbiór, jaki tworzą rozwiązania $(x(m), y(m))$ tego układu, gdy m przebiega zbiór liczb rzeczywistych.

4. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź dolnej podstawy $\overline{AB}$ jest widoczna ze środka górnej podstawy P pod kątem α. Wyznaczyć cosinus kąta utworzonego przez płaszczyznę podstawy i płaszczyznę zawierającą $\overline{AB}$ oraz przeciwległą do niej krawędź $\overline{D'E'}$ górnej podstawy. Obliczenia odpowiednio uzasadnić.

5. Rozwiązać nierówność
$$-1 \leqslant \frac{2^{x+1/2}}{4^x - 4} \leqslant 1.$$

6. Nie posługując się tablicami wykazać, że $\operatorname{tg} 82^0 30' - \operatorname{tg} 7^0 30' = 4 + 2\sqrt{3}$.

7. Napisać równanie prostej k stycznej do okręgu $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ w punkcie $P(2, 3)$. Następnie wyznaczyć równania wszystkich prostych stycznych do tego okręgu, które tworzą z prostą k kąt 45^0.

8. Dobrać parametry $a > 0$ i $b \in R$ tak, aby funkcja
$$f(x) = \begin{cases} (a+1) + ax - x^2 & \text{dla } x \leqslant a, \\ \frac{b}{x^2-1} & \text{dla } x > a, \end{cases}$$
była ciągła i miała pochodną w punkcie a. Nie przeprowadzając dalszego badania sporządzić wykres funkcji $f(x)$ oraz stycznej do jej wykresu w punkcie $P(a, f(a))$.

PRACA KONTROLNA nr 4

styczeń 2003r

1. Dla jakich wartości parametru rzeczywistego t równanie
$$x + 3 = -(tx + 1)^2$$
ma dokładnie jedno rozwiązanie.

2. Czworościan foremny o krawędzi a przecięto płaszczyzną równoległą do dwóch przeciwległych krawędzi. Wyrazić pole otrzymanego przekroju jako funkcję długości odcinka wyznaczonego przez ten przekrój na jednej z pozostałych krawędzi. **Uzasadnić** postępowanie. Przedstawić znalezioną funkcję na wykresie i podać jej największą wartość.

3. Zaznaczyć na wykresie zbiór punktów (x, y) płaszczyzny spełniających warunek $\log_{xy} |y| \geqslant 1$.

4. Wyznaczyć równanie linii utworzonej przez wszystkie punkty płaszczyzny, których odległość od okręgu $x^2+y^2 = 81$ jest o 1 mniejsza niż od punktu $P(8, 0)$. Sporządzić rysunek.

5. Na dziesiątym piętrze pewnego bloku mieszkają Kowalscy i Nowakowie. Kowalscy mają dwóch synów i dwie córki, a Nowakowie jednego syna i dwie córki. Postanowili oni wybrać młodzieżowego przedstawiciela swojego piętra. W tym celu Kowalscy wybrali losowo jedno ze swoich dzieci, a Nowakowie jedno ze swoich. Następnie spośród tej dwójki wylosowano jedną osobę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przedstawicielem został chłopiec.

6. Uzasadnić prawdziwość nierówności $n + \frac{1}{2} \geqslant \sqrt{n(n + 1)}$, $n \geqslant 1$. Korzystając z niej oraz z zasady indukcji matematycznej udowodnić, że dla wszystkich $n \geqslant 1$ jest
$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}}.$$

7. Przeprowadzić badanie przebiegu zmienności funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{3x-3}{5-x}}$ i wykonać jej wykres.

8. W trójkącie ABC kąt A ma miarę α, kąt B miarę 2α, a $BC = a$. Oznaczmy kolejno przez A_1 punkt na boku $\overline{AC}$ taki, że $\overline{BA_1}$ jest dwusieczną kąta B; B_1 punkt na boku $\overline{BC}$ taki, że $\overline{A_1B_1}$ jest dwusieczną kąta A_1, itd. Wyznaczyć długość łamanej nieskończonej $ABA_1B_1A_2\ldots$.

PRACA KONTROLNA nr 5

luty 2003r

1. Jakiej długości powinien być pas napędowy, aby można go było użyć do połączenia dwóch kół o promieniach 20 cm i 5 cm, jeśli odległość środków tych kół wynosi 30 cm?

2. Umowa określa wynagrodzenie na kwotę 4000 zł. Składka na ubezpieczenie społeczne wynosi 18,7% tej kwoty, a składka na Kasę Chorych 7,75% kwoty pozostałej po odliczeniu składki na ubezpieczenie społeczne. W celu obliczenia podatku należy od 80% wyjściowej kwoty umowy odjąć składkę na ubezpieczenie społeczne i wyznaczyć 19% pozostałej sumy. Podatek jest różnicą tak otrzymanej liczby i kwoty składki na Kasę Chorych. Ile wynosi podatek?.

3. Przez punkt $P(1,3)$ poprowadzić prostą l tak, aby odcinek tej prostej zawarty pomiędzy dwiema danymi prostymi $x - y + 3 = 0$ i $x + 2y - 12 = 0$ dzielił się w punkcie P na połowy. Wyznaczyć równanie ogólne prostej l i obliczyć pole trójkąta, jaki prosta l tworzy z danymi prostymi.

4. Podstawą czworościanu jest trójkąt prostokątny ABC o kącie ostrym α i promieniu okręgu wpisanego r. Spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka D leży w punkcie przecięcia się dwusiecznych trójkąta ABC, a ściany boczne wychodzące z wierzchołka kąta prostego podstawy tworzą kąt β. Obliczyć objętość tego ostrosłupa.

5. Sporządzić wykres funkcji

$$f(x) = \log_4(2|x| - 4)^2.$$

   Odczytać z wykresu wszystkie ekstrema lokalne tej funkcji.

6. Rozwiązać równanie $\cos 2x + \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x} = 0$.

7. Dla jakich wartości parametru $a \in R$ można określić funkcję $g(x) = f(f(x))$, gdzie $f(x) = \frac{x^2}{ax-1}$. Napisać funkcję $g(x)$ w jawnej postaci. Wyznaczyć asymptoty funkcji $g(x)$ dla największej możliwej całkowitej wartości parametru a.

8. Odcinek o końcach $A(0,3)$, $B(2,y)$, $y \in [0,3]$, obraca się wokół osi Ox. Wyznaczyć pole powierzchni bocznej powstałej bryły jako funkcję y i znaleźć najmniejszą wartość tego pola. Sporządzić rysunek.

PRACA KONTROLNA nr 6

marzec 2003r

1. Dla jakich wartości parametru rzeczywistego p równanie $\sqrt{x+8p}=\sqrt{x}+2p$ posiada rozwiązanie?

2. Obrazem okręgu K w jednokładności o środku $S(0,1)$ i skali $k=-3$ jest okrąg K_1. Natomiast obrazem K_1 w symetrii względem prostej o równaniu $2x+y+3=0$ jest okrąg o tym samym środku co okrąg K. Wyznaczyć równanie okręgu K, jeśli wiadomo, że okręgi K i K_1 są styczne zewnętrznie.

3. W trapezie równoramiennym dane są promień okręgu opisanego r, kąt ostry przy podstawie α oraz suma długości obu podstaw d. Obliczyć długość ramienia tego trapezu. **Zbadać** warunki rozwiązalności zadania. Wykonać rysunek dla $\alpha=60^0$, $d=\frac{5}{2}r$.

4. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku wynosi 2β. Przez wierzchołek A podstawy oraz środek przeciwległej krawędzi bocznej poprowadzono płaszczyznę równoległą do przekątnej podstawy wyznaczającą przekrój płaski ostrosłupa. Obliczyć objętość ostrosłupa wiedząc, że pole przekroju wynosi S.

5. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt[3]{n^3+n^\alpha}}{\sqrt[5]{n^3}},$$
gdzie α jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania $2\cos\alpha=-\sqrt{3}$.

6. Rozwiązać nierówność
$$2^{1+2\log_2\cos x}-\frac{3}{4}\geqslant 9^{0.5+\log_3\sin x}.$$

7. Wybrano losowo 4 liczby czterocyfrowe (cyfra tysięcy nie może być zerem!). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwie z tych liczb czytane od przodu **lub** od końca będą podzielne przez 4.

8. Zaznaczyć na rysunku zbiór punktów (x,y) płaszczyzny określony warunkami $|x-3y|<2$ oraz $y^3\leqslant x$. Obliczyć tangens kąta, pod którym **przecinają** się linie tworzące brzeg tego zbioru.

PRACA KONTROLNA nr 7

kwiecień 2003r

1. Dwa punkty poruszają się ruchem jednostajnym po okręgu w tym samym kierunku, przy czym jeden z nich wyprzedza drugi co 44 sekund. Jeżeli zmienić kierunek ruchu jednego z tych punktów, to będą się one spotykać co 8 sekund. Obliczyć stosunek prędkości tych punktów.

2. Dla jakich wartości parametru p nierówność
$$\frac{2px^2+2px+1}{x^2+x+2-p^2}\geqslant 2$$
jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej x?

3. W równoległoboku dane są kąt ostry α, dłuższa przekątna d oraz różnica boków r. Obliczyć pole równoległoboku.

4. Naczynie w kształcie półkuli o promieniu R ma trzy nóżki w kształcie kulek o promieniu r, $4r<R$, przymocowanych do naczynia w ten sposób, że ich środki tworzą trójkąt równoboczny, a naczynie postawione na płaskiej powierzchni dotyka ją w jednym punkcie. Obliczyć wzajemną odległość punktów przymocowania kulek. Wykonać odpowiednie rysunki.

5. Posługując się rachunkiem różniczkowym określić liczbę rozwiązań równania
$$2x^3+1=6|x|-6x^2.$$

6. **Nie** stosując zasady indukcji matematycznej wykazać, że jeżeli $n\geqslant 2$ jest liczbą naturalną, to $\frac{n^n-1}{n-1}$ jest nieparzystą liczbą naturalną.

7. Rozwiązać równanie
$$\frac{8}{3}\left(\sin^2 x+\sin^4 x+\ldots\right)=4-2\cos x+3\cos^2 x-\frac{9}{2}\cos^3 x+\ldots$$

8. Rozważmy rodzinę prostych normalnych (tj. prostopadłych do stycznych w punktach styczności) do paraboli o równaniu $2y=x^2$. Znaleźć równanie krzywej utworzonej ze środków odcinków tych normalnych zawartych pomiędzy osią rzędnych i wyznaczającymi je punktami paraboli. Sporządzić rysunek.