XXXIII
KORESPONDENCYJNY KURS Z MATEMATYKI

październik 2003r.

PRACA KONTROLNA nr 1

1. Podstawą trójkąta równoramiennego jest odcinek $\overline{AB}$ o końcach $A(-1,3), B(1,-1)$, a wierzchołek C tego trójkąta leży na prostej l o równaniu $3x-y-14=0$. Obliczyć pole trójkąta ABC.

2. Pewna liczba sześciocyfrowa zaczyna się (z lewej strony) cyfrą 3. Jeśli cyfrę tę przestawimy z pierwszej pozycji na ostatnią, to otrzymamy liczbę stanowiącą 25% liczby pierwotnej. Znaleźć tę liczbę.

3. W trapezie opisanym na okręgu kąty ostre przy podstawie mają miary α i 2α, a długość **krótszego** ramienia wynosi c. Obliczyć długość **krótszej** podstawy tego trapezu. Wynik doprowadzić do najprostszej postaci.

4. Rozwiązać nierówność:
$$\frac{1}{x^2-x-2} \leqslant \frac{1}{|x|}.$$

5. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór wszystkich punktów (x,y) spełniających nierówność $\log_x\left(1+(y-1)^3\right) \leqslant 1$.

6. Rozwiązać równanie:
$$\sin^2 3x - \sin^2 2x = \sin^2 x.$$

7. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest trzy razy dłuższa od promienia kuli wpisanej w ten ostrosłup . Obliczyć cosinus kąta pomiędzy sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

8. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny: $x+1, -x^2(x+1), x^4(x+1), \ldots$ Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $S(x)$ oznaczającej sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

listopad 2003r.

PRACA KONTROLNA nr 2

1. Trójkąt prostokątny obracając się wokół jednej i drugiej przyprostokątnej daje bryły o objętościach V_1 i V_2, odpowiednio. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu tego trójkąta wokół dwusiecznej kąta prostego.

2. Czy można sumę 42000 złotych podzielić na pewną liczbę nagród tak, aby kwoty tych nagród wyrażały się w pełnych setkach złotych, tworzyły ciąg arytmetyczny oraz najwyższa nagroda wynosiła 13000 zł? Jeśli tak, to podać liczbę i wysokości tych nagród.

3. Dane są okręgi o równaniach $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ oraz $(x-2)^2+(y-1)^2=16$. Wyznaczyć równania wszystkich okręgów stycznych równocześnie do obu danych okręgów oraz do osi Oy. Sporządzić rysunek.

4. W równoległoboku kąt ostry między przekątnymi ma miarę β, a stosunek długości dłuższej przekątnej do krótszej przekątnej wynosi k. Obliczyć tangens kąta ostrego tego równoległoboku.

5. Rozwiązać równanie $\sqrt{4x-3}-3=\sqrt{2x-10}$.

6. Dobrać liczby **całkowite** a,b tak, aby wielomian $6x^3-7x^2+1$ dzielił się bez reszty przez trójmian kwadratowy $2x^2+ax+b$.

7. Rozwiązać nierówność $|2^x-3| \leqslant 2^{1-x}$. Rozwiązanie zilustrować na rysunku wykonując wykresy funkcji występujących po obu stronach tej nierówności.

8. Wyznaczyć **przedziały** monotoniczności funkcji

$$f(x)=\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad x\in[-\pi,\pi].$$

grudzień 2003r.

PRACA KONTROLNA nr 3

1. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że gracz losując 7 kart z talii 24 kart do gry otrzyma dokładnie cztery karty w jednym kolorze w tym asa, króla i damę.

2. Pewien ostrosłup przecięto na trzy części dwiema płaszczyznami równoległymi do jego podstawy. Pierwsza płaszczyzna jest położona w odległości $d_1 = 2$ cm, a druga w odległości $d_2 = 3$ cm od podstawy. Pola przekrojów ostrosłupa tymi płaszczyznami równe są odpowiednio $S_1 = 25\text{cm}^2$ oraz $S_2 = 16\text{cm}^2$. Obliczyć objętość tego ostrosłupa oraz objętość najmniejszej części.

3. Rozwiązać układ równań:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 24 \\ \frac{2\log x + \log y^2}{\log(x+y)} = 2 \end{cases}.$$

4. W trójkącie równoramiennym ABC odległość środka okręgu wpisanego od wierzchołka C wynosi d, a podstawę $\overline{AB}$ widać ze środka okręgu wpisanego pod kątem α. Obliczyć pole tego trójkąta.

5. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić prawdziwość dla $n \geqslant 1$ wzoru
$$\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}, \quad \sin x \neq 0.$$

6. Wyznaczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym
$$a_n = \frac{\sqrt[6]{4n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n + \sqrt[3]{4n^2}}}, \quad n \geqslant 1.$$

7. Dany jest wierzchołek $A(6,1)$ kwadratu. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego kwadratu wiedząc, że wierzchołki sąsiadujące z A leżą jeden na prostej $l: x-2y+1 = 0$, a jeden na prostej $k: x+3y-4 = 0$. Sporządzić rysunek.

8. Przeprowadzić badanie i wykonać wykres funkcji
$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}.$$

styczeń 2004r.

PRACA KONTROLNA nr 4

1. Statek płynie z Wrocławia do Szczecina 3 dni, a ze Szczecina do Wrocławia 5 dni. Jak długo z Wrocławia do Szczecina płynie woda?

2. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru x liczby
$$1+\log_2 3,\quad \log_x 36,\quad \frac{4}{3}\log_8 6$$
są trzema kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego.

3. Wanna o pojemności 200 l mająca kształt połowy walca (rozciętego wzdłuż osi) leży poziomo na ziemi i zawiera pewną ilość wody. Do wanny włożono belkę w kształcie walca o średnicy cztery razy mniejszej niż średnica wanny i długości równej połowie długości wanny. Okazało się, że lustro wody styka się z belką zanurzoną w wodzie. Ile wody znajduje się w wannie? Podać z dokładnością do 0,1 l.

4. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru m, dla których obydwa pierwiastki trójmianu kwadratowego $v(x)=x^2+mx-m^2$ leżą **pomiędzy** pierwiastkami trójmianu $w(x)=x^2-(m-1)x-m$.

5. Urna A zawiera trzy kule białe i dwie czarne, a urna B dwie białe i trzy czarne. Wylosowano cztery razy jedną kulę ze zwracaniem z urny A oraz jedną kulę z urny B. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wśród pięciu wylosowanych kul są co najmniej dwie kule białe.

6. Rozwiązać równanie:
$$2\sin 2x+2\cos 2x+\operatorname{tg} x=3.$$

7. Dana jest funkcja $f(x)=x^4-2x^2$. Wyznaczyć wszystkie proste styczne do wykresu tej funkcji zawierające punkt $P(1,-1)$. Określić ile punktów wspólnych z wykresem tej funkcji mają wyznaczone styczne. Rozwiązanie zilustrować rysunkiem.

8. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny, którego kąt przy wierzchołku C ma miarę α, a ramię ma długość $BC=b$. Spodek wysokości ostrosłupa leży w środku wysokości $\overline{CD}$ podstawy, a kąt płaski ściany bocznej ABS przy wierzchołku ma miarę α. Obliczyć promień kuli opisanej na tym ostrosłupie oraz cosinusy kątów nachylenia ścian bocznych do podstawy.

luty 2004r.

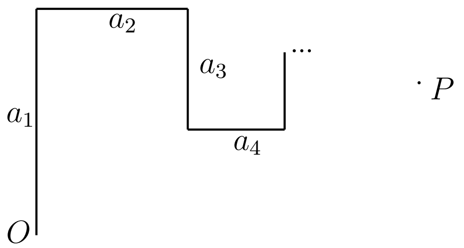
PRACA KONTROLNA nr 5

1. Piąty wyraz rozwinięcia dwumianu $(a+b)^{18}$ jest o 180% większy od wyrazu trzeciego. O ile procent wyraz ósmy tego rozwinięcia jest mniejszy bądź większy od wyrazu czwartego?

2. Wyznaczyć równanie linii utworzonej przez wszystkie punkty płaszczyzny, dla których stosunek kwadratu odległości od prostej $k : x - 2y + 3 = 0$ do kwadratu odległości od prostej $l : 3x + y + 2 = 0$ wynosi 2. Sporządzić rysunek.

3. Obwód trójkąta ABC wynosi 15, a dwusieczna kąta A dzieli bok przeciwległy na odcinki długości 3 oraz 2. Obliczyć pole koła wpisanego w ten trójkąt.

4. Cząstka startuje z początku układu współrzędnych i porusza się ze stałą prędkością



po nieskończonej łamanej jak na rysunku obok, której długości kolejnych odcinków tworzą ciąg geometryczny malejący. Po pewnym czasie cząstka zatrzymała się w punkcie $P(10, 3)$. Jaką drogę przebyła cząstka?

5. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić, że dla wszystkich $n \geqslant 1$ wielomian $x^{3n+1} + x^{3n-1} + 1$ dzieli się bez reszty przez wielomian $x^2 + x + 1$.

6. Nie przeprowadzając badania przebiegu wykonać wykres funkcji

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x - |x| + 2}.$$

Podać równania asymptot i ekstrema lokalne tej funkcji.

7. Rozwiązać nierówność

$$|\cos x|^{1+\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x} \leqslant 1, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

8. W stożek wpisano graniastosłup trójkątny prawidłowy o wszystkich krawędziach tej samej długości. Przy jakim kącie rozwarcia stożka stosunek objętości graniastosłupa do objętości stożka jest największy?

marzec 2004r.

PRACA KONTROLNA nr 6

1. W koło o powierzchni $\frac{5}{4}\pi$ wpisano trójkąt prostokątny o polu 1. Obliczyć obwód tego trójkąta.

2. Sprowadzić do najprostszej postaci wyrażenie

$$2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 7(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + \cos 4\alpha.$$

3. Wyznaczyć trójmian kwadratowy, którego wykresem jest parabola styczna do prostej $y = x + 2$, przechodząca przez punkt $P(-2, -2)$ oraz symetryczna względem prostej $x = 1$. Sporządzić rysunek.

4. W trapezie $ABCD$, w którym $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, dane są $\overrightarrow{AC}= (4, 7)$ oraz $\overrightarrow{BD}= (-6, 2)$. Posługując się rachunkiem wektorowym wyznaczyć wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, jeśli $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BD}$.

5. Jaś ma w portmonetce 3 monety jednozłotowe, 2 monety dwuzłotowe i jedną pięciozłotową. Kupując zeszyt w cenie 4 zł wyciąga losowo z portmonetki po jednej monecie tak długo, aż nazbiera się suma wystarczająca do zapłaty za zeszyt. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wyciągnie co najmniej trzy monety. Podać odpowiednie **uzasadnienie** (nie jest nim tzw. drzewko).

6. Narysować na płaszczyźnie zbiór punktów określony następująco

$$\mathcal{F} = \{(x, y) : \sqrt{4x - x^2} \leqslant y \leqslant 4 - \sqrt{1 - 2x + x^2}\}.$$

   W jakiej odległości od brzegu figury $\mathcal{F}$ znajduje się punkt $P(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$?

7. Dana jest funkcja $f(x) = \log_2(1 - x^2) - \log_2(x^2 - x)$. Nie korzystając z metod rachunku różniczkowego wykazać, że f jest rosnąca w swojej dziedzinie oraz, że $g(x) = f(x - \frac{1}{2})$ jest nieparzysta. Wyznaczyć funkcję odwrotną f^{-1}, jej dziedzinę i zbiór wartości.

8. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi c^2, a kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy ma miarę α. Ostrosłup **rozcięto na dwie części** płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków podstawy i prostopadłą do przeciwległej krawędzi bocznej. Obliczyć objętość części zawierającej wierzchołek ostrosłupa. Kiedy zadanie ma sens?

kwiecień 2004r.

PRACA KONTROLNA nr 7

1. Pierwsze dwa wyrazy ciągu geometrycznego są rozwiązaniami równania $4x^2 - 4px - 3p^2 = 0$, gdzie p jest nieznaną liczbą. Wyznaczyć ten ciąg, jeśli suma wszystkich jego wyrazów wynosi 3.

2. Wiedząc, że $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$ oraz $\varphi \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$, obliczyć **cosinus** kąta pomiędzy prostymi $y = (\sin\frac{\varphi}{2})x$, $y = (\cos\frac{\varphi}{2})x$.

3. Kostka sześcienna ma krawędź $2a$. Aby zmieścić ją w pojemniku w kształcie kuli o średnicy $3a$, ze wszystkich naroży odcięto w minimalny sposób jednakowe ostrosłupy prawidłowe trójkątne. Obliczyć długość krawędzi bocznej odciętych czworościanów?

4. Udowodnić prawdziwość nierówności
$$1 + \frac{x}{2} \geqslant \sqrt{1+x} \geqslant 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \quad \text{dla } x \in [-1, 1].$$
Zilustrować ją na odpowiednim wykresie.

5. Rozwiązać równanie:
$$\frac{\cos 5x}{\sin 2x} = -\sin 3x.$$

6. Znaleźć równanie okręgu symetrycznego do okręgu $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$ względem stycznej do tego okręgu poprowadzonej z punktu $P(3,5)$ i mającej dodatni współczynnik kierunkowy.

7. W okrąg o promieniu r wpisano trapez o przekątnej $d \geqslant r\sqrt{3}$ i największym obwodzie. Obliczyć pole tego trapezu.

8. Metodą analityczną określić dla jakich wartości parametru m układ równań
$$\begin{cases} mx & -y & +2 = 0 \\ x & -2|y| & +2 = 0 \end{cases}$$
ma dokładnie jedno rozwiązanie? Wyznaczyć to rozwiązanie w zależności od m. Sporządzić rysunek.