

XXXIV
KORESPONDENCYJNY KURS Z MATEMATYKI

PRACA KONTROLNA nr 1

październik 2004r.

1. Staś kupił zeszyty 32-kartkowe po 80 gr za sztukę i zeszyty 60-kartkowe po 1,20 zł za sztukę i zapłacił 13,20 zł. Ile zeszytów 60-kartkowych kupił Staś, jeśli było ich więcej niż zeszytów 32-kartkowych?

2. Rozwiązać nierówność

$$\frac{x^2 + x}{x^3 - x} \leq 1.$$

3. Dana jest parabola o równaniu $y = -x^2 + 2x + 3$. Znaleźć równanie paraboli, która jest symetryczna do danej względem punktu $S(2, 1)$, oraz wyznaczyć punkty, w których przecina ona osie układu współrzędnych. Sporządzić rysunek.

4. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC dany jest wierzchołek kąta prostego $C(1, 1)$, a bok \overline{AB} leży na prostej $x + 5y + 7 = 0$. Wyznaczyć współrzędne wierzchołków A i B .

5. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym kąty płaskie ścian bocznych przy wierzchołku są równe α . Wyznaczyć cosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

6. Dany jest trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie α i ramieniu b . Ramiona tego trójkąta przecięto prostą odcinając z niego deltoid. Wyznaczyć kąty pozostałego mniejszego trójkąta oraz jego pole. Kiedy zadanie ma rozwiązanie?

7. Rozwiązać nierówność

$$\sqrt{2^{x-2} + 3} \leq 2^x - 2.$$

8. Wyznaczyć dziedzinę oraz narysować wykres funkcji $s(x)$ danej wzorem

$$s(x) = \log_2(1 - x + x^2 - x^3 + \dots).$$

Przy pomocy wykresu określić zbiór wartości tej funkcji.

9. Rozwiązać równanie

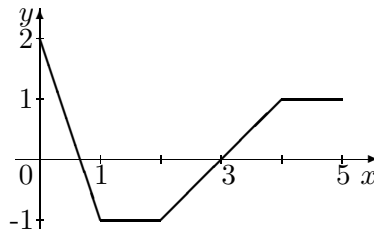
$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 4x}{\cos 2x}.$$

PRACA KONTROLNA nr 2

listopad 2004r.

1. Liczby o 45% mniejsza i o 32% większa od ułamka okresowego $0,(60)$ są pierwiastkami trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych względnie pierwszych. Obliczyć resztę z dzielenia tego trójmianu przez dwumian $(x - 1)$.

2. Wykres funkcji $f : [0, 5] \rightarrow R$ jest przedstawiony na rysunku obok. Narysować wykres funkcji $g(x) = f(x) - f(5 - x)$ i zapisać ją wzorem.



3. Obliczyć wartości $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, jeśli wiadomo, że

$$\sin \alpha + 3 \cos \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \alpha \in [0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}.$$

4. Suma 20 pierwszych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego jest równa zeru, a iloczyn dziesiątego i jedenastego wyrazu wynosi -1 . Dla jakich liczb naturalnych n suma n pierwszych wyrazów tego ciągu przekracza 77?
5. Trapez równoramienny jest wpisany w okrąg o promieniu R , a jedną z jego podstaw jest średnica tego okręgu. W trapez ten daje się wpisać okrąg. Wyznaczyć jego promień.
6. Środek kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym trójkątnym leży w odległości d **ponad** podstawą ostrosłupa, a kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy wynosi α . Obliczyć objętość ostrosłupa.
7. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru rzeczywistego m , dla których funkcja

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + mx + 4}$$

jest dodatnia i rosnąca na odcinku $(0, 1)$.

8. Nie korzystając z rachunku różniczkowego wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości funkcji

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{2} - \cos x - \sqrt{3} \sin x}, \quad x \in [0, \pi].$$

9. Rozwiązać układ równań

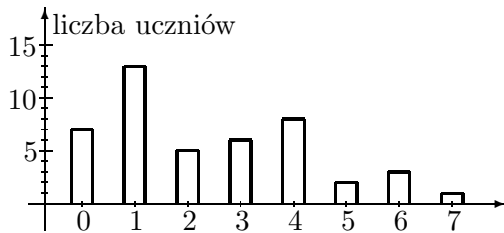
$$\begin{cases} |x + 1|y = 4 \\ x^2 - 4|x| + 2y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Przedstawić ilustrację graficzną obu równań i zaznaczyć na rysunku znalezione rozwiązania.

PRACA KONTROLNA nr 3

grudzień 2004r.

1. W pewnej szkole zapytano uczniów klas maturalnych ile razy w ostatnim miesiącu uczestniczyli w imprezie kulturalnej. Wyniki przedstawiono na diagramie obok. Obliczyć: a) Ilu uczniów jest w klasach maturalnych tej szkoły; b) Ile razy średnio w miesiącu uczeń był na imprezie kulturalnej. Sporządzić diagram kołowy przedstawiający procentowo otrzymane wyniki.

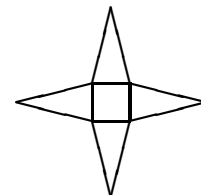


2. Turysta zauważył, że w pewnym miejscu na odcinku 10 m potok górski płynie w korycie skalnym, które w przekroju pionowym tworzy trapez o dolnej podstawie 2 m i górnej 3 m. Wysokość koryta wynosi 50 cm, przy czym woda wypełnia koryto jedynie na głębokość 10 cm. Turysta ustalił również, że czas przepływu wody przez koryto wynosi 3 sekundy. Ile litrów wody przepływa przez ten potok w ciągu jednej sekundy?
3. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a , b prawdziwa jest nierówność

$$(a + b)^3 \leq 4(a^3 + b^3).$$

Wsk. Podzielić obie strony przez b^3 i wprowadzić jedną zmienną.

4. Boki \overline{AB} i \overline{AD} równoległoboku leżą odpowiednio na prostych $3x + 4y - 7 = 0$ i $x - 2y + 1 = 0$. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka C tego równoległoboku wiedząc, że jego wysokość do boku \overline{AB} wynosi 2, a wierzchołek B ma współrzędne $(5, -2)$.
5. W trójkącie **ostrokątnym** ABC dane są bok $BC = \frac{5}{2}\sqrt{5}$ cm oraz wysokości $BD = \frac{11}{2}$ cm i $CE = 5$ cm. Obliczyć obwód tego trójkąta oraz cosinus kąta $\angle BAC$.
6. Spośród dwudziestu najmniejszych, nieparzystych liczb naturalnych wylosowano (bez zwracania) dwie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymano: a) dwie liczby pierwsze; b) dwie liczby względnie pierwsze.
7. Rozwiązać nierówność $\log_2 x^{\log_4 x} \geq \log_x 16$.
8. Niech $f(m)$ oznacza sumę trzecich potęg pierwiastków rzeczywistych równania kwadratowego $x^2 + (m + 3)x + m^2 = 0$ z parametrem m . Wyznaczyć wzór funkcji $f(m)$ oraz najmniejszą i największą wartość tej funkcji.
9. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy wynosi α , a odległość krawędzi podstawy od przeciwległej ściany bocznej jest równa $d = 3$ cm. Obliczyć wysokość ściany bocznej. Czy siatka tego ostrosłupa, jak na rysunku obok, zmieści się na arkuszu papieru w kształcie kwadratu o boku 16 cm, jeśli wiadomo, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$? Sporządzić rysunek.

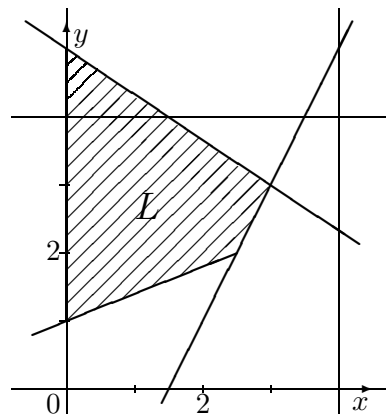


PRACA KONTROLNA nr 4

styczeń 2005r.

1. Krawędzie oraz przekątna prostopadłościanu tworzą cztery kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego, przy czym przekątna ma długość 7 cm. Jaką najkrótszą drogę musi przebyć mucha, aby wędrując po krawędziach tego prostopadłościanu odwiedziła wszystkie jego wierzchołki.
2. Dany jest wielomian $w(x) = x^4 - 2x^2 - x + 2$. Rozłożyć na czynniki możliwie najniższego stopnia wielomian $p(x) = w(x+1) - w(x)$.

3. Na rysunku obok przedstawiono fragment mapy w skali 1:25000, który zawiera obszar lasu L ograniczony czterema drogami. Na mapę jest naniesiona siatka kilometrowa, a dodatkowo umieszczono na niej układ współrzędnych pokrywający się z wybranymi liniami siatki. Zapisać obszar L w postaci układu nierówności liniowych (w skali mapy). Obliczyć rzeczywiste pole obszaru L wyrażając go w hektarach.



4. Na ile sposobów może Krzysiek rozdzielić 12 jednakowych cukierków pomiędzy siebie i trójkę rodzeństwa, jeśli każdy ma otrzymać co najmniej dwa cukierki.
5. W stożek wpisano sześciąt o krawędzi a . Rozwinięcie powierzchni bocznej stożka tworzy wycinek koła o kącie środkowym 120° . Obliczyć tangens kąta pod jakim tworzącą tego stożka widać ze środka sześciąta.
6. W trójkącie ABC dane są kąty α i β przy podstawie \overline{AB} oraz środkowa $CD = s$ podstawy. Obliczyć pole tego trójkąta.
7. Rozwiązać równanie $3^{\sin x} + 9^{\sin x} + 27^{\sin x} + \dots = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, którego lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.
8. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić nierówność:

$$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \dots + \sqrt{2n-1} > \sqrt{\frac{n}{2}}, \quad n \geq 1.$$

9. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru rzeczywistego p , dla których krzywe o równaniach $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^p$ przecinają się w pewnym punkcie pod kątem 45° . Rozwiązanie zilustrować odpowiednim rysunkiem.

PRACA KONTROLNA nr 5

luty 2005r.

1. Firma otrzymała zlecenie na wyprodukowanie 80000 sztuk pewnego wyrobu w terminie 60 dni. Każdy z 20 pracowników firmy może wykonać w ciągu dnia 50 sztuk tego wyrobu. Reszta zamówienia może być zrealizowana przez dotychczasową załogę, ale za dodatkową pracę należy zapłacić podwójnie. Można też zatrudnić pewną liczbę nowych pracowników, którzy otrzymają 80% wynagrodzenia stałych pracowników. Nowy pracownik może po 4 dniach szkolenia wykonać 26 sztuk wyrobów w pierwszym dniu i zwiększać wydajność o 1 sztukę dziennie aż do osiągnięcia 50 sztuk. Ilu nowych pracowników należałoby zatrudnić wybierając drugi wariant i który wariant jest korzystniejszy dla firmy?
2. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a i b , których iloczyn oraz różnica kwadratów są równe ich sumie.
3. Dane są zbiory na płaszczyźnie $A = \{(x, y) : (x + y)(y - 2x) \leq 0\}$ oraz $B = \{(x, y) : y(3 - x) \geq x\}$. Zaznaczyć na rysunku zbiór $C = A \cap B$. Podać wszystkie punkty zbioru C , których obie współrzędne są **liczbami naturalnymi**.
4. W czworokącie **wypukłym** $ABCD$ przekątne $\vec{AC} = [7, -1]$ i $\vec{BD} = [3, 3]$ przecinają się w punkcie O odległym o $\sqrt{8}$ od wierzchołków C i D . Wyznaczyć wektory \vec{AB} i \vec{BC} oraz narysować ten czworokąt.
5. Wazon w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 4 cm i wysokości 25 cm napełniono całkowicie wodą. Następnie wylano część wody przechylając wazon w taki sposób, że poziom wody na dwóch krawędziach bocznych znajdował się w odległości 4 cm i 3 cm od górnego brzegu wazonu. Jaka wysokość będzie miał słup wody w wazonie po ustawieniu go z powrotem w pozycji pionowej?
6. Z badać monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{2^n + 2^{n+1} + \dots + 2^{2n+1}}{2 + 2^3 + \dots + 2^{2n+1}}.$$

7. Sporządzić wykres funkcji $f(x) = \sqrt{5x - x^2} - 2$ nie przeprowadzając badania jej przebiegu i podać nazwę otrzymanej krzywej. Na podstawie wykresu określić liczbę rozwiązań równania $|\sqrt{5x - x^2} - 2| = p$ w zależności od parametru rzeczywistego p .
8. Wykazać, że równanie kwadratowe $3x^2 + 4x \sin \alpha - \cos 2\alpha = 0$ ma dla każdej wartości parametru α dwa różne pierwiastki rzeczywiste. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru $\alpha \in [0, 2\pi]$, dla których suma odwrotności pierwiastków tego równania jest nieujemna.
9. Wyznaczyć asymptoty, przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji

$$f(x) = |x - 2| + \frac{5x - 4}{2x^3}.$$

PRACA KONTROLNA nr 6

marzec 2005r.

1. Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 9. Cyfra setek jest równa $1/8$ liczby złożonej z dwu pozostałych cyfr, a cyfra jednostek jest także równa $1/8$ liczby złożonej z dwu pozostałych cyfr. Co to za liczba?
2. Obliczyć $\operatorname{tg} \beta$, gdzie $\beta \in [0, \pi]$, wiedząc, że $\cos \beta = \sin \alpha + \cos \alpha$ oraz że $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, $\alpha \in [0, \pi]$. W której ćwiartce leży kąt $\alpha + \beta$? Odpowiedź uzasadnić nie wykonując obliczeń przybliżonych.
3. Wyznaczyć równania wszystkich parabol przechodzących przez punkt $P(1, \sqrt{3})$, których wierzchołek i punkty przecięcia z osią Ox tworzą trójkąt równoboczny o polu $\sqrt{3}$. Sporządzić rysunek.
4. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyniki **kolejnych** rzutów utworzą a) ciąg arytmetyczny; b) ciąg rosnący?
5. Z punktu P leżącego w odległości R od powierzchni kuli o promieniu R poprowadzono trzy półproste styczne do tej kuli tworzące kąt trójścienny o jednakowych kątach płaskich. Obliczyć cosinus kąta płaskiego tego trójścianu.
6. Okrąg o promieniu r przecina każde z ramion kąta ostrego 2γ w dwóch punktach w taki sposób, że wyznaczają one dwie cięciwy jednakowej długości, a czworokąt utworzony przez te cztery punkty ma największe pole. Obliczyć odległość środka okręgu od wierzchołka kąta?
7. Rozwiązać nierówność
$$\log_x \frac{1 - 2x}{2 - x} \geq 1.$$
8. Wyznaczyć i narysować zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których suma odległości od osi Ox i od okręgu $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ wynosi 2.
9. Dana jest funkcja $f(x) = \cos 2x + \frac{2}{3} \sin x \cdot |\sin x|$. a) Korzystając z definicji uzasadnić, że $f'(0) = 0$. b) Znaleźć wszystkie punkty z przedziału $[-\pi, \pi]$, w których styczna do wykresu funkcji $f(x)$ jest równoległa do stycznej w punkcie $x = \frac{\pi}{4}$. Rozwiązanie zilustrować odpowiednim rysunkiem.

PRACA KONTROLNA nr 7

kwiecień 2005r.

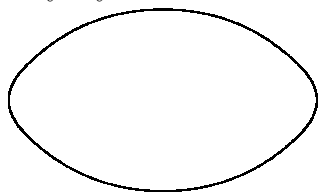
1. Liczba czteroelementowych podzbiorów zbioru A jest 11 razy większa od liczby jego podzbiorów dwuelementowych, a zbiór $B \subset A$ ma tyle samo podzbiorów czteroelementowych co dwuelementowych. Ile podzbiorów co najwyżej trzelementowych ma zbiór $A \setminus B$?
2. Reszta z dzielenia wielomianu $x^3 + px^2 - x + q$ przez trójmian $(x + 2)^2$ wynosi $(-x + 1)$. Obliczyć pierwiastki tego wielomianu.
3. Kula \mathcal{K} jest styczna do wszystkich krawędzi czworościanu foremnego o objętości 64 cm^3 . Czwoorościan ten przecięto płaszczyzną równoległą do jednej ze ścian i styczną do kuli \mathcal{K} . Obliczyć objętość otrzymanego ostrosłupa ściętego.

4. Znaleźć wszystkie wartości parametru p , dla których przedział $[1, 2]$ jest zawarty w dziedzinie funkcji

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3px + 2p^2}}{\sqrt{x + p}}.$$

5. Ze zbioru liczb czterocyfrowych wylosowano (ze zwracaniem) 4 liczby. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwie z wylosowanych liczb czytane od strony lewej do prawej lub od strony prawej do lewej są podzielne przez 4.

6. Należy wykonać stolik o symetrycznym owalnym blacie, jak pokazano na rysunku obok, o długości 1 m i szerokości 60 cm. Projektant przyjął, że brzeg blatu będzie się składał z czterech łuków okręgów, każdy o kącie środkowym 90° . Jakie powinny być promienie tych łuków, aby brzeg blatu był krzywą gładką? Podać powierzchnię blatu z dokładnością do 1 cm^2 .



7. Styczna do okręgu $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ w punkcie $A(-1, 2)$, prosta $3x + 4y - 10 = 0$ oraz oś Ox tworzą trójkąt. Obliczyć jego pole i sporządzić rysunek.
8. Rozwiązać równanie

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{ctg}^6 x - \dots = \frac{1 + \cos 3x}{2},$$

którego lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

9. Na walcu obrotowym o wysokości równej średnicy podstawy opisano ostrosłup prawidłowy trójkątny o najmniejszej objętości i taki, że jedna z podstaw walca leży na podstawie ostrosłupa. Obliczyć tangens kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do podstawy.