XXXV
KORESPONDENCYJNY KURS Z MATEMATYKI

PRACA KONTROLNA nr 1

październik 2005r.

1. Niech $f(x) = x^2 + bx + 5$. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru b, dla których: a) wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej $x = 2$, b) wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f leży na prostej $x + y + 1 = 0$. Sporządzić staranny rysunek.

2. Kilkoro dzieci dostało torebkę cukierków do równego podziału. Gdyby liczba dzieci była o 1 mniejsza, to każde z nich dostałoby o 2 cukierki więcej. Gdyby cukierków było dwa razy więcej, a dzieci o dwoje więcej, to każde dostałoby o 5 cukierków więcej. Ile było dzieci a ile cukierków?

3. Babcia założyła swemu rocznemu wnukowi lokatę w wysokości 1000 zł oprocentowaną w wysokości 6% w skali roku z półroczną kapitalizacją odsetek i postanowiła co 6 miesięcy wpłacać na to konto 100 zł. Jaką sumę dostanie wnuczek w dniu swoich osiemnastych urodzin?

4. Dane są wierzchołki $A(-3, 2)$, $C(4, 2)$, $D(0, 4)$ trapezu równoramiennego $ABCD$, w którym $\overline{AB}||\overline{CD}$. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka B oraz pole trapezu. Sporządzić rysunek.

5. Wyznaczyć stosunek długości przekątnych rombu wiedząc, że stosunek pola koła wpisanego w ten romb do pola rombu wynosi $\frac{\pi}{5}$.

6. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o dłuższym boku a. Przekątna prostopadłościanu tworzy z przekątnymi ścian bocznych kąty α oraz 2α. Obliczyć objętość tego prostopadłościanu. Dla jakich kątów α zadanie ma rozwiązanie?

7. Dla jakich wartości parametru p funkcja
$$f(x) = \frac{x^3}{px^2 + px + 1}$$
jest określona i rosnąca na całej prostej rzeczywistej?

8. Rozwiązać równanie
$$\operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}\sin x.$$

9. Liczby $a_1 = (\sqrt{2})^{\log_{\frac{1}{2}} 16}$ oraz $a_2 = 16^{-\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[4]{2}}$ są odpowiednio pierwszym i drugim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Rozwiązać nierówność
$$(\sqrt{x})^{\log^2 x - 1} \geqslant 2S,$$
gdzie S oznacza sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

PRACA KONTROLNA nr 2

listopad 2005r.

1. Stop zawiera 60% srebra próby 0,6 i 30% srebra próby 0,7 oraz 20 dkg srebra próby 0,8.
   a) Ile srebra i jakiej próby należy dodać, by otrzymać 2,5 kg srebra próby 0,7?
   b) Obliczyć próbę stopu, jakim należy zastąpić połowę danego stopu, by otrzymać stop o próbie 0,75?

2. Wyznaczyć wszystkie punkty okręgu o środku $(0,0)$ i promieniu 5, których iloczyn kwadratów współrzędnych jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 12 i 14. Obliczyć obwód wielokąta, którego wierzchołkami są znalezione punkty. Bez używania kalkulatora zbadać, czy jest on większy od 30.

3. Dla jakich wartości a i b wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b$ jest podzielny przez trójmian kwadratowy $(x^2 - 1)$? Dla znalezionych wartości współczynników a i b rozwiązać nierówność $W(x) \leqslant 0$.

4. Wykorzystując tożsamość trygonometryczną $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ narysować staranny wykres funkcji $f(x) = |\sin x + \cos x|$. Korzystając z tego wykresu, wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f na przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$. Wyznaczyć rozwiązania równania $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ zawarte w tym przedziale.

5. Pole powierzchni całkowitej stożka jest dwa razy większe od pola powierzchni kuli wpisanej w ten stożek. Znaleźć cosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do podstawy.

6. W trójkącie równoramiennym suma długości ramienia i promienia okręgu opisanego na tym trójkącie równa jest m a wysokość trójkąta równa jest 2. Wyznaczyć długość ramienia jako funkcję parametru m oraz wartość m, dla której kąt przy wierzchołku trójkąta równy jest $120°$? Dla jakich wartości m zadanie ma rozwiązanie?

7. Narysować zbiory $A = \{(x,y) : x^2 + 2x + y^2 \leqslant 0\}$, $B = \{(x,y) : x^2 + 2y + y^2 \leqslant 0\}$, $C = \{(x,y) : x \leqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 4\}$. Obliczyć pola figur $A \cap B, A \setminus B, C \setminus (A \cup B)$. Podać równania osi symetrii figury $A \cup B$.

8. Rozwiązać nierówność $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \leqslant \frac{1}{x-1}$.

9. Wyznaczyć równania wszystkich prostych stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{8x}{x^2+3}$, które są prostopadłe do prostej o równaniu $x + y = 0$. Obliczyć pole równoległoboku, którego wierzchołkami są punkty wspólne tych stycznych z wykresem funkcji $f(x)$.

PRACA KONTROLNA nr 3

grudzień 2005r

1. Drogę z miasta A do miasta B rowerzysta pokonuje w ciągu 3 godzin. Po długotrwałych deszczach stan $\frac{3}{5}$ drogi pogorszył się na tyle, że na tym odcinku rowerzysta może jechać z prędkością o 4 km/h mniejszą. By czas podróży z A do B nie uległ zmianie, zmuszony jest na pozostałym odcinku zwiększyć prędkość o 12 km/h. Jaka jest odległość z A do B i z jaką prędkością jeździł rowerzysta przed ulewami?

2. Niech $f(x) = \big|4 - |x-2|\big| + 1$. Sporządzić staranny wykres funkcji f i posługując się nim: a) wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $[0,7]$, b) podać równanie osi symetrii wykresu funkcji f, c) wyznaczyć $a > 0$ tak, aby pole figury ograniczonej osiami układu, wykresem funkcji f oraz prostą $x = a$ było równe 32.

3. Promień światła przechodzi przez punkt $A(1,1)$, odbija się od prostej o równaniu $y = x - 2$ (zgodnie z zasadą mówiącą, że kąt padania jest równy kątowi odbicia) i przechodzi przez punkt $B(4,6)$. Wyznaczyć współrzędne punktu odbicia P oraz równania prostych, po których biegnie promień przed i po odbiciu.

4. Na egzaminie uczeń wybiera losowo 4 pytania z zestawu egzaminacyjnego liczącego 40 pytań. Aby zdać egzamin należy poprawnie odpowiedzieć na co najmniej dwa pytania. Jakie jest prawdopodobieństwo zdania egzaminu przez ucznia znającego odpowiedzi na 40% pytań z zestawu egzaminacyjnego?

5. W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy $a_1 + a_3 = 3$ oraz $a_1 a_4 = 1$. Dla jakich n prawdziwa jest nierówność $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leqslant 93$?

6. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b obracamy wokół środkowej najdłuższego boku. Obliczyć objętość otrzymanej bryły.

7. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $7^n - (-3)^n$ dzieli się przez 10.

8. Dla jakich wartości parametru rzeczywistego m równanie
$$2^{2x} - 2(m-1)2^x + m^2 - m - 2 = 0$$
ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty?

9. Wśród graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych o danym polu powierzchni całkowitej $S = 27\sqrt{3}$ dm^2 wskazać graniastosłup o największej objętości. Podać objętość tego graniastosłupa z dokładnością do 1 ml.

PRACA KONTROLNA nr 4

styczeń 2006r.

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 2(x-y) \\ x^3 + y^3 &= 6-(x-y) \end{cases} .$$

2. Dany jest punkt $P(3,2)$ oraz dwie proste k i l o równaniach odpowiednio: $x+y+4=0$ i $2x-3y-9=0$. Znaleźć taki punkt Q na prostej l, aby środek odcinka $\overline{PQ}$ leżał na prostej k. Rozwiązanie zilustrować odpowiednim rysunkiem.

3. Dla jakich wartości parametru rzeczywistego $a \neq 0$ pierwiastki wielomianu $w(x) = a^2x^3 - a^2x^2 - (a^2+1)x + a^2 - 1$ są trzema pierwszymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego? Dla każdego otrzymanego przypadku obliczyć czwarty wyraz ciągu.

4. Znaleźć liczbę trzycyfrową wiedząc, że iloraz z dzielenia tej liczby przez sumę jej cyfr jest równy 48, a różnica szukanej liczby i liczby napisanej tymi samymi cyframi, ale w odwrotnym porządku wynosi 198.

5. W okrąg wpisano trapez tak, że jedna z jego podstaw jest średnicą okręgu. Stosunek długości obwodu trapezu do sumy długości jego podstaw jest równy $\frac{3}{2}$. Obliczyć cosinus kąta ostrego w tym trapezie.

6. Na ostrosłupie prawidłowym trójkątnym opisano stożek, a na tym stożku opisano kulę. Kąt przy wierzchołku przekroju osiowego stożka jest równy α. Obliczyć stosunek objętości kuli do objętości ostrosłupa.

7. Rozwiązać nierówność
$$3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x+1} < 4^x - 5 \cdot 3^{x-\frac{1}{2}} .$$

8. Zbadać przebieg zmienności i sporządzić staranny wykres funkcji $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2-1}$. Następnie narysować wykres funkcji $k = g(m)$, gdzie k jest liczbą pierwiastków równania $\left|\frac{4-x^2}{x^2-1}\right| = m$.

9. Ze zbioru cyfr $\{0,1,2,3\}$ wylosowano dwie i odrzucono. Z otrzymanego zbioru wylosowano ze zwracaniem pięć cyfr. Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba utworzona z tych cyfr jest podzielna przez 3?

PRACA KONTROLNA nr 5

luty 2006r.

1. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 i 8 cm. W trójkąt ten wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki leżą na przeciwprostokątnej, a dwa pozostałe na przyprostokątnych. Obliczyć pola figur, na jakie brzeg kwadratu dzieli dany trójkąt.

2. Niech A będzie zbiorem tych punktów x osi liczbowej, których suma odległości od punktów -1 i 5 jest mniejsza od 12, a $B = \{x \in R\ :\ \sqrt{x^2 - 25} - x < 1\}$. Znaleźć i zaznaczyć na osi liczbowej zbiory A, B oraz $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

3. Wykazać, że liczba $x = \sqrt[3]{2\sqrt{6} + 4} - \sqrt[3]{2\sqrt{6} - 4}$ jest niewymierna.
   Wskazówka: obliczyć x^3.

4. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie
$$\cos x = \frac{3m}{m^2 - 4}$$
   ma rozwiązanie w przedziale $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Obliczyć $\operatorname{ctg} x$ dla całkowitych m z tego zbioru.

5. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym przekrój o najmniejszym polu płaszczyzną zawierającą wysokość ostrosłupa jest trójkątem równobocznym o boku $2a$. Obliczyć cosinus kąta dwuściennego między ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

6. Dane jest półkole o średnicy AB i promieniu długości $|AO| = r$. Na promieniu AO jako na średnicy wewnątrz danego półkola zakreślono półokrąg. Na większym półokręgu obrano punkt P i połączono go z punktami A i B. Odcinek AP przecina mniejszy półokrąg w punkcie C. Obliczyć długość odcinka AP, jeżeli wiadomo, że $|CP| + |PB| = 1$. Przeprowadzić analizę dla jakich wartości r zadanie ma rozwiązanie.

7. Zbadać monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n-2}{\sqrt{n^2+1}}$. Obliczyć granicę tego ciągu, a następnie znaleźć wszystkie jego wyrazy odległe od granicy co najmniej o $\frac{1}{10}$.

8. Wykazać, że pole trójkąta ograniczonego styczną do wykresu funkcji $y = \frac{2x-3}{x-2}$ i jego asymptotami jest stałe. Sporządzić rysunek.

9. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} \log_{(x-y)}[8(x+y)] &= -2 \\ (x+y)^{\log_4(x-y)} &= \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$