XXXIX
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

październik 2009 r.

PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Właściciel hurtowni sprzedał $\frac{1}{3}$ partii bananów po założonej przez siebie cenie. Okazało się, że owoce zbyt szybko dojrzewają, więc obniżył cenę o 30% i wówczas sprzedał 60% pozostałej ilości owoców. Resztę bananów udało mu się sprzedać dopiero, gdy ustalił ich cenę na poziomie $\frac{1}{5}$ ceny początkowej. Ile procent zaplanowanego zysku stanowi kwota uzyskana ze sprzedaży? Po ile powinien był sprzedać pierwszą partię towaru, by jednokrotna obniżka ich ceny o 25% pozwoliła na sprzedaż wszystkich owoców i uzyskanie zaplanowanego początkowo zysku?

2. Przekątne trapezu o podstawach 3 i 4 przecinają się pod kątem prostym. Na każdym z boków trapezu, jako na średnicy, oparto półokrąg. Obliczyć sumę pól otrzymanych czterech półkoli. Sporządzić rysunek.

3. Uprościć wyrażenie $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\left(\sqrt[6]{a^5}-\dfrac{b}{\sqrt[6]{a}}\right)-\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[6]{a}\sqrt{b}}$ dla a,b, dla których ma ono sens. Następnie obliczyć jego wartość, przyjmując $a=(4-2\sqrt{3})^3$ i $b=3+2\sqrt{2}$.

4. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest sześciokąt foremny o boku a. Obliczyć objętość, wiedząc, że najmniejszy (w sensie powierzchni) z przekrojów ostrosłupa płaszczyzną zawierającą wysokość jest trójkątem równobocznym. Wyznaczyć cosinus kąta między ścianami bocznymi ostrosłupa. Sporządzić rysunek.

5. Dana jest funkcja liniowa $f(x)=2x-6$.

   a) Dla jakiego a pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji $h(x)=f(x-a)$ równe jest 4? Sporządzić rysunek.

   b) Narysować zbiór $D=\{(x,y): f(x^2+2x)\leqslant y\leqslant f(x+2)\}$.

6. Sporządzić wykres funkcji $f(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{dla} \quad x<0, \\ -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1 & \text{dla} \quad x\geqslant 0. \end{cases}$

   Posługując się nim, wyznaczyć przedziały monotoniczności tej funkcji. Narysować wykres funkcji $g(m)$ określającej liczbę rozwiązań równania $f(x)=|m|$ w zależności od parametru rzeczywistego m.

PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Statek wyrusza (z biegiem rzeki) z przystani A do odległej o 140 km przystani B. Po upływie 1 godziny wyrusza za nim łódź motorowa, dopędza statek w połowie drogi, po czym wraca do przystani A w tym samym momencie, w którym statek przybija do przystani B. Wyznaczyć prędkość statku i prędkość łodzi w wodzie stojącej, wiedząc, że prędkość nurtu rzeki wynosi 4 km/godz.

2. Uprościć wyrażenie (dla a, b, dla których ma ono sens)
$$\left(\frac{\sqrt[6]{b}}{\sqrt{b}-\sqrt[6]{a^3b^2}}-\frac{a}{\sqrt{ab}-a\sqrt[3]{b}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\left(\sqrt[6]{a^5}-\frac{b}{\sqrt[6]{a}}\right)-\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[6]{a}\sqrt{b}}\right],$$
a następnie obliczyć jego wartość dla $a = 4\log_4 81$ i $b = (\log_3 2)^{-1}$.

3. Rozwiązać równanie $\sin 2x + \sin x = 2 + \cos x - 2\cos^2 x$.

4. Rozwiązać nierówność $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \geqslant \dfrac{1}{x-1}$ i starannie zaznaczyć zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

5. Każda z przekątnych trapezu ma długość 5, jedna z podstaw ma długość 2, a pole równe jest 12. Obliczyć promień okręgu opisanego na tym trapezie. Sporządzić rysunek.

6. W czworościanie $ABCD$ jedna krawędź jest o połowę krótsza od pozostałych, które są równe. Obliczyć objętość oraz cosinusy kątów dwuściennych tego czworościanu. Sporządzić rysunek.

XXXIX
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

listopad 2009 r.

PRACA KONTROLNA nr 2 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określona jest wzorem $S_n = 2n^2 + 5n + c$. Wyznaczyć stałą c tak, by (a_n) był ciągiem arytmetycznym. Obliczyć sumę dwudziestu jeden pierwszych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych.

2. Narysować zbiory: $A=\{(x,y) : (x-1)^2 \leqslant y \leqslant 2-|x-1|\}$, $B=\{(x,y) : |x|+|x-2| \leqslant 2y\}$ oraz $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Ile wynosi pole figury $A \cap B$?

3. Przekrój graniastosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i jedną z krawędzi bocznych jest kwadratem. Obliczyć stosunek pola przekroju tego graniastosłupa płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy dolnej i przeciwległy wierzchołek podstawy górnej do pola przekroju płaszczyzną zawierającą przekątną graniastosłupa i środki przeciwległych krawędzi bocznych. Sporządzić rysunek.

4. Niech $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{dla} \quad x \leqslant 1, \\ 1 + \frac{2}{x} & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$

   a) Sporządzić wykres funkcji f i na jego podstawie wyznaczyć zbiór wartości tej funkcji.

   b) Obliczyć $f(\sqrt{3}-1)$ i korzystając z wykresu zaznaczyć na osi $0x$ zbiór rozwiązań nierówności $f^2(x) \leqslant 4$.

5. Wiadomo, że liczby $-1, 3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 - ax^3 - 4x^2 + bx + 3$. Rozwiązać nierówność $\sqrt{W(x)} \leqslant x^2 - x$.

6. Punkt $A = (1, 0)$ jest wierzchołkiem rombu o kącie przy tym wierzchołku równym 60°. Wyznaczyć współrzędne pozostałych wierzchołków rombu wiedząc, że dwa z nich leżą na prostej $l:\ 2x - y + 3 = 0$. Ile rozwiązań ma to zadanie?

PRACA KONTROLNA nr 2 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Dane są liczby $m = \dfrac{\binom{6}{4}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{7}{3}}$, $n = \dfrac{(\sqrt{2})^{-4}\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}\sqrt[4]{3}}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^{3}\cdot 27^{-\frac{1}{4}}}$.

   Wyznaczyć sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, którego pierwszym wyrazem jest m, a piątym n. Ile wyrazów tego ciągu należy wziąć, by ich suma przekroczyła 99% sumy wszystkich wyrazów?

2. Narysować zbiory: $A = \{(x,y) : x^2 + 2x + y^2 \leqslant 3\}$, $B = \{(x,y) : |y| \leqslant \sqrt{3}x + \sqrt{3}\}$ oraz $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Wyznaczyć równanie okręgu wpisanego w figurę $A \cap B$.

3. Liczby: $a_1 = \log_{(3-2\sqrt{2})^2}(\sqrt{2}-1)$, $a_2 = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{6}$, $a_3 = 3^{\log_{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{6}}{2}}$, $a_4 = \log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$, $a_5 = \left(2^{\sqrt{2}+1}\right)^{\sqrt{2}-1}$, $a_6 = \log_3 2$ są wszystkimi pierwiastkami wielomianu $W(x)$, którego wyraz wolny jest dodatni.

   a) Które z tych pierwiastków są niewymierne? Odpowiedź uzasadnić.

   b) Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{W(x)}$, nie wykonując obliczeń przybliżonych.

4. Narysować wykres funkcji f zadanej wzorem $f(x) = \begin{cases} |2^{x-1} - 1| & \text{dla} \quad x \leqslant 1, \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$

   Posługując się wykresem i odpowiednimi obliczeniami rozwiązać nierówność
   $$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$$

5. Na prostej $x + 2y = 5$ wyznaczyć punkty, z których okrąg $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ jest widoczny pod kątem 60°. Obliczyć pole obszaru ograniczonego łukiem okręgu i stycznymi do niego poprowadzonymi w znalezionych punktach. Sporządzić rysunek.

6. Na dnie naczynia w kształcie walca umieszczono cztery jednakowe metalowe kulki o możliwie największej objętości. Następnie do naczynia wrzucono jeszcze jedną kulkę i okazało się, że jest ona styczna do płaskiej pokrywy naczynia. Wyznaczyć promienie kulek wiedząc, że przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku d.

XXXIX
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

grudzień 2009 r.

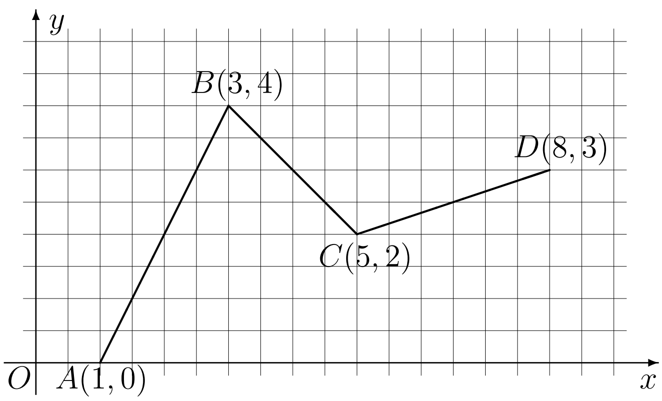
PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Sześć kostek sześciennych o objętościach 256, 128, 64, 32, 16 i 8 cm^3 ustawiono w piramidę. Czy można tę piramidę umieścić na półce o wysokości 24 cm? Odpowiedź uzasadnić bez wykonywania obliczeń przybliżonych.

2. Wojtuś postawił przypadkowo cztery pionki na szachownicy o 16 polach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najwyżej dwa pionki będą stały w szeregu (poziomo lub pionowo)?

3. Rozwiązać nierówność
$$\left|\frac{x^2+3x+2}{2x^2+7x+6}\right| \leqslant 1.$$

4. Łamana $ABCD$ jest przedstawiona na rysunku poniżej. Niech E będzie punktem przecięcia się prostych AB i CD. Obliczyć pole trójkąta CBE.



5. Obserwator, stojąc w pewnej odległości, widzi wieżę kościoła pod kątem 60°. Po oddaleniu się o 50 m kąt widzenia zmniejszył się do 45°. Obliczyć cosinus kąta, pod jakim obserwator będzie widział wieżę kościoła, jeśli oddali się o kolejne 50 m.

6. Wycinek koła ma obwód $2s$, gdzie $s > 0$ jest ustaloną liczbą. Wyrazić pole P tego wycinka jako funkcję promienia r koła. Sporządzić wykres funkcji $P = P(r)$.

PRACA KONTROLNA nr 3 -POZIOM ROZSZERZONY

1. Sporządzić wykres funkcji $f(m) = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami równania $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$, a m jest parametrem rzeczywistym.

2. Ala ułożyła z czterech klocków liczbę 2009. Następnie spośród tych klocków losowała ze zwracaniem cztery razy po jednym klocku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z otrzymanych w ten sposób cyfr można byłoby utworzyć liczbę:

   a) podzielną przez 3?

   b) podzielną przez 4?

3. Rozważmy funkcje $f(x) = 4^{x+1} + 4^{2x+1} + 4^{3x+1} + \ldots$ oraz $g(x) = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots$, gdzie prawe strony wzorów określających obie funkcje są sumami wyrazów nieskończonych ciągów geometrycznych. Wykazać, że funkcja $f(x)$ jest rosnąca. Znaleźć wszystkie liczby x, dla których $f(x) = g(x)$.

4. Rozwiązać nierówność
$$\frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{3\operatorname{tg} x - 2\sin x} \geqslant \cos^2 \frac{x}{2}.$$

5. Okrąg styczny do ramion paraboli $y = x^2 - 2x$ jest styczny równocześnie do osi Ox. Znaleźć równania stycznych do okręgu w punktach jego styczności z parabolą.

6. Z odcinków o długościach równych czterem najmniejszym nieparzystym liczbom pierwszym zbudowano trapez, którego pole jest liczbą wymierną. Wyznaczyć tangens kąta między przekątnymi tego trapezu.

XXXIX
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

styczeń 2010 r.

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Mamy dwa termosy kawy z mlekiem. W pierwszym termosie stosunek objętości mleka do objętości kawy wynosi 2:3, a w drugim 3:7. Ile litrów płynu należy wziąć z każdego termosu, aby otrzymać 2,4 litra kawy z mlekiem, w której objętość kawy będzie dwa razy większa niż objętość mleka?

2. Kwotę 100000 zł wpłacono na lokatę roczną, w której odsetki doliczane są co kwartał. Po roku suma odsetek wyniosła dokładnie 4060,401 zł. Znaleźć oprocentowanie tej lokaty. Jakie powinno być oprocentowanie lokaty, aby przy kapitalizacji dokonywanej raz na pół roku osiągnąć ten sam zysk?

3. Dane są zbiory $A=\{(x,y) : x,y,\in\mathbb{R}, y^2-4x^2\geqslant 0\}$ i $B=\{(x,y) : |x|+|y|\leqslant 2\}$. Narysować zbiór $A\cup B$. Znaleźć punkt ze zbioru $A\cup B$ położony najbliżej puntu $C=(3,2)$.

4. Narysować wykres trójmianu kwadratowego $f(x) = x^2+4x-5$ oraz wykres funkcji $g(x) = 4-f(x-2)$.

   a) Rozwiązać nierówność $f(x) > g(x)$.

   b) Znaleźć obraz wykresu funkcji $f(x)$ w symetrii względem prostej $x = 2$ i na tej podstawie podać wzór tej funkcji.

5. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi podstawy równej a kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku jest równy 2α. Obliczyć objętość tego ostrosłupa oraz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy.

6. W trapezie $ABCD$, w którym bok AB jest równoległy do boku DC, dane są: $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $|AB| = 20$, $|DC| = 8$ oraz $|AD| = 5$. Obliczyć obwód tego trapezu, $\sin\angle ADB$ oraz odległość punktu przecięcia się przekątnych tego trapezu od jego podstaw.

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Dzieląc wielomian $W(x)$ przez dwumian $x-3$ otrzymujemy resztę równą 2, a dzieląc ten wielomian przez $x-2$ otrzymujemy resztę równą 1. Wyznaczyć resztę z dzielenia $W(x)$ przez $(x-2)(x-3)$. Znaleźć wielomian trzeciego stopnia spełniający powyższe warunki wiedząc, że $x=1$ jest pierwiastkiem tego wielomianu, a suma wyrazu wolnego i współczynnika przy x^3 jest równa 0.

2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)=\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x$ na przedziale $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ i rozwiązać nierówność $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{4}$. Zadanie rozwiązać bez używania pojęcia pochodnej.

3. Rozwiązać nierówność
$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2^{2x+1}-16^x\right)\geqslant -12x.$$

4. W stożek o kącie rozwarcia równym 2α wpisano kulę o promieniu R. Wewnątrz stożka stawiamy na kuli sześcian o maksymalnej objętości i podstawie równoległej do podstawy stożka. Wyznaczyć długość krawędzi tego sześcianu.

5. Stosunek długości promienia okręgu wpisanego do długości promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym wynosi $\frac{1}{3+2\sqrt{3}}$. Obliczyć sinusy kątów ostrych tego trójkąta.

6. Ślimak ma do przejścia taśmę o długości 3 metrów zamocowaną w punkcie startu A. W ciągu każdego dnia udaje mu się przejść 1 metr, a każdej nocy gdy śpi, ktoś - ciągnąc za drugi koniec taśmy - wydłuża ją równomiernie o 1 metr. Niech d_n oznacza długość taśmy w n-tym dniu, a a_n - odległość ślimaka od punktu A przy końcu n-tego dnia.

   a) Uzasadnić, że ciąg (a_n) zdefiniowany jest następującym wzorem rekurencyjnym: $a_1=1$ oraz $a_{n+1}=\frac{3+n}{2+n}a_n+1$ dla $n\geqslant 1$.

   b) Pokazać, że $a_n=(n+2)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n+2}\right)$, $n\geqslant 1$.

   c) Czy ślimak dojdzie do końca taśmy? Jeżeli tak, to w którym dniu, to znaczy, dla jakich n prawdziwa jest nierówność $a_n>d_n$?

XXXIX
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

luty 2010 r.

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Dwie wiewiórki, Kasia i Basia, postanowiły wspólnie zbierać orzechy. Każdego dnia Basia przynosiła do wspólnej spiżarni o 4 orzechy więcej niż Kasia, codziennie tyle samo. Po 30 dniach współpracy wiewiórki pokłóciły się. Basia zostawiła Kasi wszystkie orzechy i założyła własną spiżarnię. Od tamtej pory każda z wiewiórek przynosi do swojej spiżarni tę samą ilość orzechów co przedtem, ale Basia codziennie dostaje 6 orzechów od Kasi. Po 50 dniach samodzielnej pracy Kasia ma jeszcze o 100 orzechów więcej niż Basia. Ustalić, po ile orzechów zbiera codziennie każda z wiewiórek i oszacować, po ilu dniach w spiżarni Basi będzie więcej orzechów niż u koleżanki.

2. Określić dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$. Wykonać staranny wykres funkcji $g(x) = f(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ i rozwiązać równanie $g(x) = 0$. Posługując się sporządzonym wykresem określić zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \geqslant 0$.

3. Wyznaczyć równania wszystkich prostych, które są styczne jednocześnie do obu okręgów
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad (x-5)^2 + (y-1)^2 = 1.$$
Obliczenia zilustrować odpowiednim rysunkiem.

4. Rozwiązać nierówność
$$\frac{3\sqrt{4-x}+1}{1-\sqrt{4-x}} > 1 - 2\sqrt{4-x}.$$

5. Koszt budowy I kondygnacji biurowca wynosi 10 mln zł., a każdej kolejnej jest niższy o 100 tys. zł. od poprzedniej. Planowany koszt wynajmu powierzchni biurowych w tym budynku jest stały do XL kondygnacji i wynosi 200 tys. zł. za całą kondygnację, a potem podwaja się co 5 kondygnacji (na kolejnych 5 kondygnacjach jest stały). Roczny koszt wynajmu ostatniej, najbardziej prestiżowej i droższej od pozostałych kondygnacji jest równy kosztowi budowy całego XXXVII piętra. Oszacować, po ilu latach zwróci się inwestorom koszt budowy tego budynku.

6. W trapezie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę $\frac{\pi}{3}$, a różnica długości podstaw wynosi 4. Ustalić, ile powinno wynosić pole tego trapezu, aby można było wpisać w niego koło. W tym przypadku wyznaczyć stosunek pola koła opisanego na tym trapezie do pola koła wpisanego.

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste m, dla których równanie
$$\frac{x}{m} + m = \frac{m}{x} + x + 1$$
ma dwa pierwiastki różnych znaków.

2. Rozwiązać nierówność
$$2^{x^2+4} + 2^{x^2+3} + 2^{x^2} > 5^{x^2+1} - 25 \cdot 2^{x^2-2}.$$

3. Określić dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x) = \operatorname{ctg}(\pi + x)\operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{2})\cos x$. Sporządzić staranny wykres funkcji $g(x) = 2f(|x - \frac{\pi}{4}|) - 1$. Na podstawie wykresu i niezbędnych obliczeń rozwiązać nierówność $g(x) \leqslant -2$, a zbiór jej rozwiązań zaznaczyć na osi OX.

4. Rozwiązać nierówność
$$\log_{x^2}(3x-1) - \log_{x^2}(x-1)^2 + \log_{x^2}|x-1| \geqslant \frac{1}{2}.$$

5. W ostrosłupie sześciokątnym prawidłowym kąt dwuścienny utworzony przez płaszczyzny przeciwległych ścian bocznych ma miarę $\frac{\pi}{4}$. Wyznaczyć promień R kuli opisanej na tym ostrosłupie jako funkcję długości a boku jego podstawy.

6. W koło wpisano ośmiokąt foremny, w ośmiokąt koło, w koło kolejny ośmiokąt foremny itd. Wysunąć hipotezę o wartości pola n-tego koła i uzasadnić ją indukcyjnie. Suma pól nieskończonego ciągu kół otrzymanych w ten sposób jest ośmiokrotnością pola jednego z nich. Ustalić którego, nie stosując obliczeń przybliżonych.

XXXX
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

marzec 2010 r.

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Logarytmy (przy ustalonej podstawie) z liczb: $a_1=\frac{2}{5}x$, $a_2=x-1$, $a_3=x+3$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznaczyć x. Dla znalezionego x obliczyć sumę początkowych dziesięciu wyrazów ciągu geometrycznego, którego trzema pierwszymi wyrazami są liczby a_1, a_2, a_3.

2. Odcinek o końcach $A(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ jest bokiem wielokąta foremnego wpisanego w okrąg styczny do osi Ox. Wyznaczyć równanie tego okręgu i współrzędne pozostałych wierzchołków wielokąta. Ile rozwiązań ma to zadanie? Sporządzić rysunek.

3. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Ostrosłup ten podzielono płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy na dwie bryły o tej samej objętości. Wyznaczyć tangens kąta nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy. Sporządzić rysunek.

4. O kącie α wiadomo, że $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

   a) Określić, w której ćwiartce jest kąt α.

   b) Obliczyć $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$ oraz $\sin\alpha + \cos\alpha$.

   c) Wyznaczyć $\operatorname{tg}\alpha$.

5. Dłuższa przyprostokątna b trójkąta prostokątnego o kącie ostrym 30° jest średnicą półokręgu dzielącego ten trójkąt na dwa obszary. Wyznaczyć stosunek pól tych obszarów oraz długość promienia okręgu wpisanego w obszar zawierający wierzchołek kąta 60°. Sporządzić rysunek.

6. Dwaj turyści wyruszyli jednocześnie: jeden z punktu A do punktu B, drugi - z B do A. Każdy z nich szedł ze stałą prędkością i dotarłszy do mety, natychmiast ruszał w drogę powrotną. Pierwszy raz minęli się w odległości 12 km od punktu B, drugi - po upływie 6 godzin od momentu pierwszego spotkania - w odległości 6 km od punktu A. Obliczyć odległość punktów A i B i prędkości, z jakimi poruszali się turyści.

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać równanie
$$\sqrt{x^2-3}+\sqrt{5-2x}=4-x.$$

2. Z urny zawierającej 2 kule białe, 4 czerwone i 3 czarne wylosowano jedną kulę. Następnie wylosowano jeszcze trzy kule, gdy pierwsza okazała się biała, dwie kule, gdy pierwsza była czerwona, lub jedną kulę, gdy w pierwszym losowaniu wypadła czarna. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w urnie nie pozostała żadna kula biała.

3. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt o bokach a, b i kącie między nimi α, a przekątne ścian bocznych, wychodzące z wierzchołka kąta α, są do siebie prostopadłe. Obliczyć objętość graniastosłupa.

4. Na jednym rysunku sporządzić staranne wykresy funkcji
$$f(x)=\sqrt{6x-x^2} \quad \text{oraz} \quad g(x)=\left|\frac{3}{2}-f(x+2)\right|.$$
Obliczyć pole figury ograniczonej wykresem funkcji $g(x)$ i osią Ox.

5. Podać dziedzinę i sprawdzić tożsamość
$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$
Cosinus kąta ostrego α wynosi $\frac{1}{8}$. Korzystając z powyższej tożsamości, obliczyć wartość sumy $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{4}+\operatorname{tg}\alpha$. Wynik podać w najprostszej postaci.

6. Punkt $C(-2,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Środkowe trójkąta przecinają się w punkcie $M(1,2)$, a dwusieczne w punkcie $S\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$. Wyznaczyć współrzędne wierzchołków A i B.