XL
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

wrzesień 2010 r.

PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Ile jest trzycyfrowych liczb naturalnych:
   a) podzielnych przez 3 lub przez 5?
   b) podzielnych przez 3 lub przez 6?
   c) podzielnych przez 3 i niepodzielnych przez 5?

2. Renomowany dom mody sprzedał 40% kolekcji letniej po założonej cenie. Po obniżce ceny o 50% udało się sprzedać połowę pozostałej części towaru i dopiero kolejna 50% - owa obniżka pozwoliła opróżnić magazyny. Ile procent zaplanowanego przychodu stanowi uzyskana ze sprzedaży kwota? O ile procent wyjściowa cena towaru powinna była być wyższa, by sklep uzyskał zaplanowany początkowo przychód?

3. Określić dziedzinę wyrażenia $w(x,y) = \dfrac{2}{x-y} - \dfrac{3xy}{x^3-y^3} - \dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}$.

   Sprowadzić je do najprostszej postaci i obliczyć $w(1+\sqrt{2},(1+\sqrt{2})^{-1})$.

4. Obliczyć sumę wszystkich liczb pierwszych spełniających nierówność

   $$(p-4)x^2 - 4(p-2)x - p \leqslant 0, \quad \text{gdzie} \quad p = \frac{64^{\frac{1}{3}}\sqrt{8} + 8^{\frac{1}{3}}\sqrt{64}}{\sqrt[3]{64\sqrt{8}}}\ .$$

5. Dwa naczynia zawierają w sumie 40 litrów wody. Po przelaniu pewnej części wody pierwszego naczynia do drugiego, w pierwszym naczyniu zostało trzy razy mniej wody niż w drugim. Gdy następnie przelano taką samą część wody drugiego naczynia do pierwszego, okazało się, że w obu naczyniach jest tyle samo płynu. Obliczyć, ile wody było pierwotnie w każdym naczyniu i jaką jej część przelewano.

6. Dwie gaździny, pracując razem, mogą wykonać zamówioną partię pisanek w ciągu 7 dni pod warunkiem, że pierwsza z nich rozpocznie pracę o półtora dnia wcześniej niż druga. Gdyby każda z nich pracowała oddzielnie, to druga wykonałaby całą pracę o 3 dni wcześniej od pierwszej. Ile dni potrzebuje każda z kobiet na wykonanie całej pracy?

PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Ile jest liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 9, które w rozwinięciu dziesiętnym mają: a) obie cyfry 1, 2 i tylko te? b) obie cyfry 1, 3 i tylko te? c) wszystkie cyfry 1, 2, 3 i tylko te? Odpowiedź uzasadnić. W przypadku b) wypisać otrzymane liczby.

2. Pan Kowalski zaciągnął 31 grudnia pożyczkę 4000 złotych oprocentowaną w wysokości 18% w skali roku. Zobowiązał się spłacić ją w ciągu roku w trzech równych ratach płatnych 30 kwietnia, 30 sierpnia i 30 grudnia. Oprocentowanie pożyczki liczy się od 1 stycznia, a odsetki od kredytu naliczane są w terminach płatności rat. Obliczyć wysokość tych rat w zaokrągleniu do pełnych groszy.

3. Określić dziedzinę wyrażenia
$$w(x,y)=\frac{x}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}+\frac{y}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}+\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{x^2+2y^2}{x^4-y^4}.$$
Sprowadzić je do najprostszej postaci i obliczyć $w(\cos 15^\circ, \sin 15^\circ)$.

4. Liczba $p=\dfrac{(\sqrt[3]{54}-2)(9\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{2}+4)-(2-\sqrt{3})^3}{\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})^2}$ jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bx+c$. Wyznaczyć współczynniki a,b,c oraz drugie miejsce zerowe tej funkcji wiedząc, że największą wartością funkcji jest 4, a jej wykres jest symetryczny względem prostej $x=1$.

5. Do zbiornika poprowadzono trzy rury. Pierwsza rura potrzebuje do napełnienia zbiornika o 4 godziny więcej niż druga, a trzecia napełnia cały zbiornik w czasie dwa razy krótszym niż pierwsza. W jakim czasie napełnia zbiornik każda z rur, jeżeli wiadomo, że wszystkie trzy rury otwarte jednocześnie napełniają zbiornik w ciągu 2 godzin i 40 minut?

6. Z przystani A wyrusza z biegiem rzeki statek do przystani B, odległej od A o 140 km. Po upływie 1 godziny wyrusza za nim łódź motorowa, dopędza statek, po czym wraca do przystani A w tym samym momencie, w którym statek przybija do przystani B. Znaleźć prędkość biegu rzeki, jeżeli wiadomo, że w stojącej wodzie prędkość statku wynosi 16 km/godz, a prędkość łodzi 24 km/godz.

XL
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

październik 2010 r.

PRACA KONTROLNA nr 2 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Niech $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{x^2+23} \geqslant \dfrac{1}{10x} \right\}$ oraz $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x-2| < \dfrac{7}{2} \right\}$.
   Zbiory A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$ zapisać w postaci przedziałów liczbowych i zaznaczyć je na osi liczbowej.

2. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiory
   $$A = \{(x,y) : |x| + |y| \leqslant 2\} \quad \text{oraz} \quad B = \left\{ (x,y) : \frac{1}{|x-1|} \leqslant \frac{1}{|x+3|},\ \frac{2}{|y-1|} \geqslant 1 \right\}$$
   i obliczyć pole zbioru $A \cap B$.

3. Trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$ przyjmuje najmniejszą wartość równą -1 w punkcie $x=1$ a reszta z dzielenia tego trójmianu przez dwumian $(x-2)$ równa jest 1. Wyznaczyć współczynniki a, b, c. Narysować staranny wykres funkcji $g(x) = f(|x|)$ i wyznaczyć najmniejszą i największą wartość tej funkcji na przedziale$[-1, 3]$.

4. Tangens kąta ostrego α równy jest $\dfrac{a}{b}$, gdzie
   $$a = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} \right)^2, \quad b = \left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{\sqrt{2}-1} \right)^2.$$
   Wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta. Wykorzystując wzór $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$, obliczyć miarę kąta α.

5. Narysować wykres funkcji $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - x$ i rozwiązać nierówność $f(x) < 0$. W zależności od parametru m określić liczbę rozwiązań równania $|f(x)| = m$. Dla jakiego a pole trójkąta ograniczonego osią Ox i wykresem funkcji $g(x) = f(x) - a$ równe jest 6?

6. Niech $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{dla } x \leqslant 1, \\ 2 + \frac{1}{x} & \text{dla } x > 1. \end{cases}$

   a) Narysować wykres funkcji f i na jego podstawie wyznaczyć zbiór wartości funkcji.

   b) Obliczyć $f(\sqrt{3} - 1)$ oraz $f(3 - \sqrt{3})$.

   c) Rozwiązać nierówność $2\sqrt{f(x)} \leqslant 3$ i zbiór jej rozwiązań zaznaczyć na osi $0x$.

PRACA KONTROLNA nr 2 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać nierówność $\dfrac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}} \geqslant \dfrac{1}{x-2}$ i zbiór rozwiązań zaznaczyć na prostej.

2. Niech $A = \{(x,y) : y \geqslant ||x-2|-1|\}$, $B = \{(x,y) : y + \sqrt{4x-x^2-3} \leqslant 2\}$.
   Narysować na płaszczyźnie zbiór $A \cap B$ i obliczyć jego pole.

3. Dla jakich wartości rzeczywistego parametru p równanie $(p-1)x^4 + (p-2)x^2 + p = 0$ ma dokładnie dwa różne pierwiastki?

4. Znaleźć wszystkie wartości parametru rzeczywistego m, dla których pierwiastki trójmianu kwadratowego $f(x)=(m-2)x^2 - (m+1)x - m$ spełniają nierówność $|x_1| + |x_2| \leqslant 1$.

5. Narysować staranny wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4x+4} - 1 & \text{, gdy } \ |x-2| \geqslant 1, \\ -\sqrt{4x-x^2-3} & \text{, gdy } \ |x-2| \leqslant 1. \end{cases}$$

   i rozwiązać nierówność $|f(x)| > \frac{1}{2}$. W zależności od parametru m określić liczbę rozwiązań równania $|f(x)| = m$. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $g(x) = |f(x)|$ i prostą $y = \frac{1}{2}$.

6. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{gdy } \ |x-1| \geqslant 1, \\ x^2 - x - 1, & \text{gdy } \ |x-1| < 1. \end{cases}$$

   a) Obliczyć $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$, $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ oraz $f(\pi - 1)$.

   b) Narysować wykres funkcji f i na jego podstawie podać zbiór wartości funkcji.

   c) Rozwiązać nierówność $f(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$ i zaznaczyć na osi $0x$ zbiór jej rozwiązań.

XL
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

listopad 2010 r.

PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM PODSTAWOWY

1. W trójkącie prostokątnym o kącie prostym przy wierzchoku C na przedłużeniu przeciwprostokątnej AB odmierzono odcinek BD tak, że $|BD| = |BC|$. Wyznaczyć $|CD|$ oraz obliczyć pole trójkta $\triangle ACD$, jeżeli $|BC| = 5, |AC| = 12$.

2. Harcerze rozbili 2 namioty, jeden w odległości 5 m, drugi - 17 m od prostoliniowego brzegu rzeki. Odległość między namiotami równa jest 13 m. W którym miejscu na samym brzegu rzeki (licząc od punktu brzegu będącego rzutem prostopadłym punktu położenia pierwszego namiotu) powinni umieścić maszt z flagą zastępu, by odległość od masztu do każdego z namiotów była taka sama?

3. Na kole o promieniu r opisano trapez równoramienny, w którym stosunek długości podstaw wynosi $4:3$. Obliczyć stosunek pola koła do pola trapezu oraz cosinus kąta ostrego w tym trapezie.

4. Wielomian $W(x) = x^3 - x^2 + bx + c$ jest podzielny przez $(x + 3)$, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez $(x - 3)$ równa jest 6. Wyznaczyć b i c, a następnie rozwiązać nierówność $(x + 1)W(x - 1) - (x + 2)W(x - 2) \leqslant 0$.

5. Wykonać działania i zapisać w najprostszej postaci wyrażenie

$$s(a,b) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right) : \left(\frac{a^2}{a^3-b^3} - \frac{a}{a^2+ab+b^2}\right).$$

   Wyznaczyć wysokość trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o promieniu 6 opuszczoną z wierzchołka kąta prostego wiedząc, że tangens jednego z kątów ostrych tego trójkąta równy jest $s(\sqrt{5}+\sqrt{3}, \sqrt{5}-\sqrt{3})$.

6. W trójkącie ABC dane są $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$, wysokość $|CD| = h = 5$ oraz $BD = d = \sqrt{2}$. Obliczyć odległość środków okręgów wpisanych w trójkąty ADC i DBC.

PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + ax + b$, gdzie $b \neq 0$. Wykazać, że $W(x)$ posiada pierwiastek podwójny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek $4a^3 + 27b^2 = 0$. Wyrazić pierwiastki za pomocą współczynnika b.

2. Wyznaczyć promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$, w którym kąt przy wierzchołku A ma miarę α, kąty przy wierzchołkach B, D są proste oraz $|BC| = a, |AD| = b$. Sporządzić staranny rysunek.

3. Narysować staranny wykres funkcji $f(x) = \dfrac{\sin 2x - |\sin x|}{\sin x}$.
   W przedziale $[0, \pi]$ wyznaczyć rozwiązania nierówności $f(x) < 2(\sqrt{2} - 1)\cos^2 x$.

4. Z wierzchołka A kwadratu $ABCD$ o boku a poprowadzono dwie proste, które dzielą kąt przy tym wierzchołku na trzy równe części i przecinają boki kwadratu w punktach K i L. Wyznaczyć długości odcinków, na jakie te proste dzielą przekątną kwadratu. Znaleźć promień okręgu wpisanego w deltoid $AKCL$.

5. Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB = 1, BC = 2, CD = 4, DA = 3$ jest wpisany w okrąg. Obliczyć promień R tego okręgu. Sprawdzić, czy w czworokąt ten można wpisać okrąg. Jeżeli tak, to obliczyć promień r tego okręgu.

6. Na boku BC trójkąta równobocznego obrano punkt D tak, że promień okręgu wpisanego w trójkąt ADC jest dwa razy mniejszy niż promień okręgu wpisanego w trójkąt ABD. W jakim stosunku punkt D dzieli bok BC?

XL
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

grudzień 2010 r.

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Rozwiązać równanie $\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ dla $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

2. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty: $A(1,-1), B(5,7), C(4,-4), D(2,4)$. Obliczyć odległość punktu przecięcia prostych AB i CD od symetralnej odcinka BC. Sporządzić rysunek.

3. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} y + x^2 = 4 \\ 4x^2 - y^2 + 2y = 1 \end{cases}$$
Podać interpretację geometryczną tego układu i wykazać, że cztery punkty, które są jego rozwiązaniem, wyznaczają na płaszczyźnie trapez równoramienny. Znaleźć równanie okręgu opisanego na tym trapezie.

4. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym długość krawędzi podstawy jest równa a. Kąt między krawędzią podstawy, a krawędzią boczną jest równy $\frac{\pi}{4}$. Obliczyć pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej. Sporządzić staranny rysunek.

5. Dane są dwa okręgi: K_1 o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu 5 i K_2 o równaniu $x^2+6x+y^2-12y+5=0$. Obliczyć pole czworokąta wyznaczonego przez środki okręgów oraz punkty, w których te okręgi się przecinają. Sporządzić staranny rysunek.

6. Podstawą graniastosłupa jest równoległobok o bokach długości a i $2a$ oraz kącie ostrym $\frac{\pi}{3}$. Krótsza przekątna graniastosłupa tworzy w płaszczyzną podstawy kąt $\frac{\pi}{6}$. Obliczyć długość dłuższej przekątnej oraz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać równanie $2\sin^2 x - 2\sin x \cos 2x = 1$.

2. Dane są dwa wektory $\vec{a} = [2, -3]$ oraz $\vec{b} = [-1, 4]$. Pokazać, że wektor $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{BC} = 8\vec{a} + 11\vec{b}$. Obliczyć długość środkowej trójkąta ABC rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$, poprowadzonej z wierzchołka B.

3. Niech K będzie wierzchołkiem paraboli $f(x) = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x$, a L - wierzchołkiem paraboli $g(x) = -f(x-7) + 7$. Na paraboli $g(x)$ znaleźć taki punkt N, aby wektor $\overrightarrow{NL}$ był równoległy do wektora $\overrightarrow{MK}$, gdzie $M = (0, f(0))$. Obliczyć pole czworokąta $KMLN$.

4. Przekrój sześcianu płaszczyzną jest sześciokątem foremnym. Wyznaczyć kąt nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy sześcianu oraz obliczyć pole tego przekroju. Wykonać odpowiedni rysunek.

5. Dane są dwa okręgi: K_1 o środku w punkcie $P(1, 1)$ i promieniu 1 oraz K_2 o środku $Q(9, 5)$ i promieniu 3. Znaleźć punkt S na odcinku $\overline{PQ}$ oraz dobrać skalę k tak, aby okrąg K_2 był obrazem okręgu K_1 w jednokładności o środku S i skali k. Wyznaczyć równania prostych, które są styczne jednocześnie do obu okręgów i przechodzą przez punkt S.

6. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole każdej z pięciu ścian jest równe 1. Ostrosłup ten ścięto w połowie wysokości płaszczyzną równoległą do podstawy. Obliczyć objętość oraz pole powierzchni całkowitej otrzymanego ostrosłupa ściętego. Wykonać odpowiedni rysunek.

XL
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

styczeń 2011 r.

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM PODSTAWOWY

1. W ciągu arytmetycznym suma początkowych dwudziestu jeden wyrazów wynosi $21\sqrt{2}$, a jego dziesiąty wyraz równy jest $-2-2\sqrt{2}$. Wyznaczyć najmniejszy dodatni wyraz tego ciągu.

2. Rozwiązać nierówność
$$-2 < \log_{\frac{1}{2}}(5x+2) \leqslant 2.$$

3. Firmy X i Y jednocześnie rozpoczęły działalność. W pierwszym miesiącu każda z nich miała dochód równy 50 000 zł. Po pięciu miesiącach okazało sie, że dochód firmy X rósł z miesiąca na miesiąc o tę samą kwotę, a dochód firmy Y wzrastał co miesiąc geometrycznie. W drugim i trzecim miesiącu działalnosci firma X miała dochód wiekszy od dochodu firmy Y o 2000 zł. Ustalić, która z firm miała wiekszą sumę dochodów w pierwszych pięciu miesiącach swojej działalności.

4. Sporządzić staranny wykres funkcji (za jednostkę przyjąć 2 cm)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{1-x} & \text{dla} \quad |x-1| \geqslant 1, \\ -2x^2+3x & \text{dla} \quad |x-1| < 1. \end{cases}$$
Korzystając z niego, określić ilość rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od rzeczywistego parametru m.

5. Stosując wzór na sinus podwojonego kąta oraz wzory redukcyjne, obliczyć wartość wyrażenia
$$\cos\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{2\pi}{5} \cdot \cos\frac{3\pi}{5} \cdot \cos\frac{4\pi}{5}.$$

6. Wiedząc, że $\sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, wyznaczyć wszystkie kąty $\alpha \in [0,\pi]$, dla których spełnione jest równanie
$$2^{2+\sin\alpha} = \sqrt{2} \cdot 4^{\cos^2\alpha}.$$

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Zaznaczyć na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności
$$\frac{2x-\sqrt{2-x}}{x} \geqslant x.$$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, dla których funkcja
$$f(x) = 2^{x^2+2} - 2^{x^2-1} - 2\cdot 7^{x^2-1}$$
przyjmuje wartości dodatnie.

3. Określić dziedzinę i sporządzić staranny wykres funkcji $f(x) = 1 - \log_3(1-x)$. Za jednostkę przyjąć 2 cm. Znaleźć obraz tego wykresu w symetrii osiowej względem prostej $x = y$ i podać wzór funkcji, której wykresem jest nowo powstała krzywa.

4. Rozwiązać nierówność
$$\sqrt{\log_2(x^2-1)} > \log_2\sqrt{x^2-1}.$$

5. Niech $c > 0$ i $c \neq 1$. Znaleźć liczbę naturalną m, dla ktorej suma m początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $a_n = \log_2(c^n)$, jest 10100 razy większa od sumy wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego $b_n = \log_{2^{3^n}}(c)$.

6. Korzystając ze wzoru
$$\sin 5\alpha = 5\sin\alpha - 20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha,$$
obliczyć wartość $\sin\frac{\pi}{5}$. Podać wartości wyrażeń $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{10}$ oraz $\cos\frac{\pi}{10}$. Wyprowadzić wzór na pole dwudziestokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu r.

XL
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

luty 2011 r.

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Losujemy liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$, a następnie liczbę ze zbioru $\{2, 3, 4, 5\}$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pierwsza z wylosowanych liczb jest podzielna przez drugą.

2. Liczba 2-elementowych podzbiorów zbioru A jest 7 razy większa niż liczba 2-elementowych podzbiorów zbioru B. Liczba 2-elementowych podzbiorów zbioru A nie zawierających ustalonego elementu $a \in A$ jest 5 razy większa niż liczba 2-elementowych podzbiorów zbioru B. Ile elementów ma każdy z tych zbiorów? Ile każdy z tych zbiorów ma podzbiorów 3-elementowych?

3. W turnieju szachowym każdy uczestnik miał rozegrać z pozostałymi po jednej partii. Po rozegraniu trzech partii dwóch szachistów zrezygnowało z dalszej gry. W sumie rozegrano 84 partie. Ilu było uczestników na początku turnieju, jeżeli dwaj zawodnicy, którzy zrezygnowali, nie grali ze sobą?

4. Suma pierwszego i trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego (a_n) wynosi 20. Znajdź wzór ogólny ciągu arytmetycznego (b_n) takiego, że $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $b_5 = a_3$.

5. Rozkład ocen ze sprawdzianu w klasie IIIa jest opisany tabelką

ocena	1	2	3	4	5
liczba osób	1	2	8	9	6

   Jaś otrzymał ocenę 4. Czy wypadł powyżej średniej w swojej klasie? W pozostałych klasach średnie punktów wynosiły: 3,875 w IIIb (24 osoby) i 4,6 w IIIc (25 osób). Czy ocena otrzymana przez Jasia znajduje się powyżej średniej liczonej łącznie wśród wszystkich uczniów klas trzecich? Ile co najmniej, a ile co najwyżej, osób miało piątki w klasie IIIc (skala ocen to 1,2,...,5)?

6. Ile liczb czterocyfrowych o wszystkich cyfrach różnych można utworzyć z cyfr 1,2,3,4,5, a ile z cyfr 0,1,2,3,4,5,6 ? W obu przypadkach obliczyć, ile można utworzyć czterocyfrowych liczb podzielnych przez 5.

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Trzeci składnik rozwinięcia dwumianu $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ ma współczynnik równy 45. Wyznaczyć wszystkie składniki tego rozwinięcia, w których x występuje w potędze o wykładniku całkowitym.

2. W turnieju szachowym rozgrywanym systemem „każdy z każdym” dwóch uczestników nie ukończyło turnieju, przy czym jeden z nich rozegrał 10 partii, a drugi tylko jedną. Ilu było zawodników i czy wspomniani zawodnicy grali ze sobą, jeżeli rozegrano 55 partii?

3. W pudełku jest 400 kul w tym n czerwonych. Wybieramy losowo dwie kule. Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czerwonych jest równe $\frac{1}{760}$.

   a) Ile kul czerwonych jest w tym pudełku?

   b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że żadna z wylosowanych kul nie jest czerwona.

4. Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego zmniejszy się o 25%, jeżeli wykreślimy z niej składniki o numerach parzystych niepodzielnych przez 4. Obliczyć sumę wszystkich wyrazów tego ciągu wiedząc, że jego drugi wyraz wynosi 1.

5. Stosując zasadę indukcji matematycznej udowodnić prawdziwość wzoru

$$\binom{2}{2}-\binom{3}{2}+\binom{4}{2}-\binom{5}{2}+\ldots+\binom{2n}{2}=n^2, \quad n \geqslant 1.$$

6. Wśród wszystkich bliźniąt 64% stanowią bliźnięta tej samej płci. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi 0,51. Obliczyć prawdopodobieństwo, że drugie z bliźniąt jest dziewczynką, pod warunkiem, że:

   a) pierwsze jest dziewczynką,

   b) pierwsze jest chłopcem.

XL
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

marzec 2011 r.

PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Rozwiązać równanie $1-|x|=\sqrt{1+x}$ i podać jego ilustrację graficzną.

2. Wyznaczyć wszystkie punkty x z przedziału $[0,2\pi]$, dla których spełniona jest nierówność $\sin 2x-\operatorname{tg} x\leqslant 0$. Podać ilustrację graficzną nierówności.

3. Określić liczbę rozwiązań układu równań
$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & |x-2|+1,\\ y & = & ax \end{array}\right.$$
w zależności od wartości współczynnika kierunkowego prostej $y=ax$. Znaleźć rozwiązania w przypadku, gdy jednym z nich jest para $(4,3)$. Sporządzić staranny rysunek.

4. Dana jest prosta $l\colon x+2y-4=0$. Przez punkt $(1,1)$ poprowadzić prostą k o dodatnim współczynniku kierunkowym tak, aby pole trójkąta ograniczonego prostymi l, k i osią $0x$ było dwa razy większe niż pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią $0y$.

5. Trójkąt równoboczny ABC o boku długości a zgięto wzdłuż wysokości CD pod pewnym kątem, otrzymując w ten sposób czworościan $ABCD$. Obliczyć objętość i pole powierzchni całkowitej tego czworościanu wiedząc, że tangens kąta nachylenia ściany ABC do podstawy czworościanu równy jest $\sqrt{6}$.

6. Punkt $(0,2)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x)=x(|x|-2a)+b$. Wyznaczyć a i b wiedząc, że $f(a)=0$.

PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać równanie
$$\sqrt{8+2x-x^2} = 2x-5.$$
Zilustrować je odpowiednim wykresem.

2. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru rzeczywistego p, dla których rozwiązania układu równań
$$\begin{cases} px + 2y = \dfrac{p}{2} \\ 2x + py = p-1 \end{cases}$$
są zawarte w kwadracie $K = \{(x,y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$.

3. Bok AB trójkąta równoramiennego ABC leży na prostej $l : x - 3y - 4 = 0$. Punkt $D(4,0)$ jest spodkiem wysokości tego trójkąta, a $S(2,1)$ środkiem boku AC. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka B. Sporządzić rysunek.

4. Podstawą ostrosłupa o wysokości h jest trójkąt prostokątny o kącie ostrym α. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod kątem α, a pole powierzchni całkowitej jest czterokrotnie większe od pola podstawy. Obliczyć objętość ostrosłupa. Wynik podać w najprostszej postaci.

5. Rozwiązać nierówność
$$\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x} + \frac{\sin^8 x}{\cos^6 x} + \ldots \geqslant \frac{3}{8},$$
w której lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

6. Jednym z pierwiastków wielomianu $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ jest liczba -1. Znaleźć pozostałe pierwiastki wiedząc, że $w(1) = -2$ i środkiem symetrii wykresu funkcji $w(x)$ jest punkt $S\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)$. Nie prowadząc dodatkowego badania, sporządzić wykres funkcji $w(x)$. Dobrać odpowiednio jednostki na osiach układu.

XL
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

kwiecień 2011 r.

PRACA KONTROLNA nr 8 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Uprościć wyrażenie

$$a(x) = \left(\frac{x+1}{x-2} - \frac{x^3+8}{x^3-8} \cdot \frac{x^2+2x+4}{x^2-4}\right) : \frac{1}{x-2}$$

   i rozwiązać nierówność $|a(x)| < 1$.

2. Trzech robotników ma wykonać pewną pracę. Wiadomo, że pierwszy i drugi robotnik, pracując razem, wykonaliby całą pracę w czasie n dni, drugi i trzeci – w czasie m dni, a pierwszy i trzeci – w czasie k dni. Ile dni potrzebuje każdy z robotników na samodzielne wykonanie całej pracy?

3. Dla jakich $\alpha \in [0, 2\pi)$ równanie kwadratowe $\cos\alpha \cdot x^2 - 2x + 2\cos\alpha - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki?

4. Wierzchołkami czworokąta są punkty, których współrzędne spełniają układ równań

$$\begin{cases} xy + x - y &= 1, \\ x^2 - xy + y^2 &= 1. \end{cases}$$

   Obliczyć pole czworokąta oraz wyznaczyć równanie okręgu na nim opisanego.

5. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest 2 razy większe niż pole podstawy. Wyznaczyć cosinusy kątów dwuściennych przy krawędzi podstawy oraz krawędzi bocznej. Sporządzić staranny rysunek.

6. Dany jest stożek ścięty, w którym pole dolnej podstawy jest 4 razy większe od pola górnej. W stożek wpisano walec tak, że dolna podstawa walca leży na dolnej podstawie stożka, a brzeg górnej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Jaką część objętości stożka ściętego stanowi objętość walca, jeżeli wysokość walca jest 3 razy mniejsza od wysokości stożka? Odpowiedź podać w procentach z dokładnością do jednego promila. Sporządzić staranny rysunek przekroju osiowego bryły.

PRACA KONTROLNA nr 8 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać nierówność
$$\frac{1}{x^2-2x-3} \geqslant \frac{1}{|x-2|+3}.$$

2. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1. \end{cases}$$
Obliczyć pole wielokąta o wierzchołkach, których współrzędne spełniają powyższy układ. Podać ilustrację graficzną tego układu.

3. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru $\alpha \in [-\pi, \pi)$, dla których równanie kwadratowe
$$(\sin 4\alpha)\, x^2 - 2(\cos\alpha)\, x + \sin 2\alpha = 0$$
ma dwa różne nieujemne pierwiastki rzeczywiste. Rozwiązania zaznaczyć na kole trygonometrycznym.

4. Udowodnić, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $a^2+b^2=(a+b-c)^2$ oraz $b, c \neq 0$, to
$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2} = \frac{a-c}{b-c}.$$

5. Trójkąt równoboczny ABC o boku a wpisano w okrąg. Na łuku BC wybrano punkt D tak, że proste AB i CD przecinają się w punkcie E i $|BE| = 2a$. Obliczyć pole S czworokąta $ABCD$ i wykazać, że $S = \frac{1}{4}(|BD|+|CD|)^2\sqrt{3}$.

6. Rozwinięcie, powierzchni, bocznej, stożka, ściętego, opisanego na kuli jest przedstawione na rysunku. Obliczyć objętość tego stożka ściętego i promień kuli opisanej na nim. Podać wynik liczbowy dla $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$.