XLI
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

wrzesień 2011 r.

PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Średni czas przeznaczony na matematykę na dwunastu wydziałach pewnej uczelni wynosi 240 godzin. Utworzono nowy wydział i wówczas średnia liczba godzin matematyki wzrosła o 5%. Ile godzin przeznaczono na matematykę na nowym wydziale?

2. Drogę z miasta A do miasta B rowerzysta pokonuje w czasie 3 godzin. Po długotrwałych deszczach stan $\frac{3}{5}$ drogi pogorszył się na tyle, że na tym odcinku rowerzysta może jechać z prędkością o 4 km/h mniejszą. By czas podróży z A do B nie uległ zmianie, zmuszony jest na pozostałym odcinku zwiększyć prędkość o 12 km/h. Jaka jest odległość z A do B i z jaką prędkością jeździł rowerzysta przed ulewami?

3. Trzy klasy pewnego gimnazjum wyjechały na zieloną szkołę. Każdy uczeń z klasy A wysłał tę samą liczbę SMS-ów. W klasie B wysłano taką samą liczbę SMS-ów, ale liczba uczniów była o 1 mniejsza, a każdy z nich wysłał o 2 SMS-y więcej. Z kolei klasa C, w której było o dwóch uczniów więcej i każdy wysłał o 5 SMS-ów więcej, wysłała w sumie dwa razy więcej wiadomości. Ilu uczniów było na zielonej szkole i ile SMS-ów wysłali?

4. Ile jest czterocyfrowych liczb naturalnych:
   a) podzielnych przez 4 i przez 5?
   b) podzielnych przez 4 lub przez 5?
   c) podzielnych przez 4 i niepodzielnych przez 5?

5. Umowa określa wynagrodzenie miesięczne pana Kowalskiego na kwotę 4 000 zł. Składka na ubezpieczenie społeczne wynosi $18,7\%$ tej kwoty, a składka na ubezpieczenie zdrowotne - $7,75\%$ kwoty pozostałej po odliczeniu składki na ubezpieczenie społeczne. W celu obliczenia podatku należy od 80% wyjściowej kwoty umowy odjąć składkę na ubezpieczenie społeczne i wyznaczyć 19% pozostałej sumy. Podatek jest różnicą tak otrzymanej kwoty i składki na ubezpieczenie zdrowotne. Ile złotych miesięcznie otrzymuje pan Kowalski? Jakie powinno być jego wynagrodzenie, by co miesiąc dostawał przynajmniej 3 000 zł?

6. Uprościć wyrażenie (dla x, y, dla których ma ono sens)
$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}$$
i następnie obliczyć jego wartość dla $x = 1+\sqrt{2}$, $y = 7+5\sqrt{2}$.

PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Wiek ojca jest o 5 lat większy niż suma lat trzech jego synów. Za 10 lat ojciec będzie 2 razy starszy od swego najstarszego syna, za 20 lat będzie 2 razy starszy od swego średniego syna, a za 30 lat będzie 2 razy starszy od swego najmłodszego syna. Kiedy ojciec był 3 razy starszy od swego najstarszego syna, a kiedy będzie 3 razy starszy od swego najmłodszego syna?

2. Dwaj rowerzyści wyruszyli jednocześnie w drogę, jeden z A do B, drugi z B do A i minęli się po godzinie. Pierwszy jechał z prędkością o 3 km większą niż drugi i przyjechał do celu o 27 minut wcześniej. Jakie były prędkości obu rowerzystów i jaka jest odległość od A do B ?

3. Pierwszy i drugi pracownik wykonają wspólnie pewną pracę w czasie c dni, drugi i trzeci - w czasie a dni, zaś pierwszy i trzeci - w czasie b dni? Ile dni potrzebuje każdy z pracowników na wykonanie tej pracy samodzielnie?

4. Ile jest liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 6, które w zapisie dziesiętnym mają:
a) obie cyfry 1, 2 i tylko te? b) obie cyfry 2, 3 i tylko te? c) wszystkie cyfry 1, 2, 3 i tylko te? Odpowiedź uzasadnić.

5. W hurtowni znajduje się towar, którego $a\,\%$ sprzedano z zyskiem $p\,\%$, a $b\,\%$ pozostałej części sprzedano z zyskiem $q\,\%$. Z jakim zyskiem należy sprzedać resztę towaru, by całkowity zysk wyniósł $r\,\%$?

6. Uprościć wyrażenie (dla x, y, dla których ma ono sens)

$$\left(\frac{y^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}} - \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - xy^{\frac{1}{3}}}\right) \cdot \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}\left(x^{\frac{5}{6}} - \frac{y}{x^{\frac{1}{6}}}\right) - \frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{2}}}\right]$$

i następnie obliczyć jego wartość dla $x = 5\sqrt{2}-7,\ y = 7+5\sqrt{2}$.

XLI
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

październik 2011 r.

PRACA KONTROLNA nr 2 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Niech $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x}{x^2-1} \geqslant \dfrac{1}{x}\right\}$ oraz $B = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| < 4\}$. Zbiory A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$ zapisać w postaci przedziałów liczbowych i zaznaczyć je na osi liczbowej.

2. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiory $A \cap B, A \setminus B$, gdzie $A = \{(x,y) : |x| + 2y \leqslant 3\}$, $B = \{(x,y) : |y| > x^2\}$.

3. Suma wysokości h ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i jego krawędzi bocznej b równa jest 12. Dla jakiej wartości h objętość tego ostrosłupa jest największa? Obliczyć pole powierzchni całkowitej ostrosłupa dla znalezionej wartości h.

4. Wykres trójmianu kwadratowego $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest symetryczny względem prostej $x = 2$, a największą wartością tej funkcji jest 1. Wyznaczyć współczynniki a, b, c, wiedząc, że reszta z dzielenia tego trójmianu przez dwumian $(x+1)$ równa jest -8. Narysować staranny wykres funkcji $g(x) = f(|x|)$ i wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji g na przedziale $[-1, 3]$.

5. Liczba $p = \dfrac{(2\sqrt{3} + \sqrt{2})^3 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^3}{(\sqrt{3}+2)^2 - (\sqrt{3}-2)^2}$ jest kwadratem promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o polu 7,2. Obliczyć wysokość i tangens mniejszego z kątów ostrych tego trójkąta.

6. Narysować wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - |2x - 4|$. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x)$ oraz wykresem funkcji $g(x) = -f(x)$. Narysować wykresy funkcji $f_1(x) = |f(x)|$ oraz $f_2(x) = f(|x|)$.

PRACA KONTROLNA nr 2 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Dla jakich wartości rzeczywistego parametru p równanie $(p-1)x^2-(p+1)x-1=0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

2. Narysować na płaszczyźnie zbiór $\left\{(x,y):\sqrt{x-1}+x\leqslant 2,\ 0\leqslant y^3\leqslant\sqrt{5}-2\right\}$ i obliczyć jego pole. Wsk. Obliczyć $a=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$.

3. Obliczyć $a=\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{5}$ i kąt α spełnia nierówność $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Znaleźć promień koła wpisanego w trójkąt prostokątny o polu 25π, wiedząc, że tangens jednego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy a.

4. Narysować wykres funkcji $f(x)=2|x-1|-\sqrt{x^2+2x+1}$. Dla jakiego m pole figury ograniczonej wykresem funkcji f oraz prostą $y=m$ równe jest 32?

5. Wiadomo, że liczby $-1,3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^4-ax^3-4x^2+bx+3$. Wyznaczyć a,b i rozwiązać nierówność $\sqrt{W(x)}\leqslant x^2-x$.

6. Narysować wykres funkcji $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x}, & \text{gdy } |x-2|\leqslant 1,\\ \dfrac{x}{x-2}, & \text{gdy } |x-2|>1\end{cases}$

   i na jego podstawie wyznaczyć:

   a) przedziały, na których funkcja f jest malejąca,

   b) zbiór wartości funkcji $f(x)$,

   c) zbiór rozwiązań nierówności $|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}$.

XLI
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

listopad 2011 r.

PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM PODSTAWOWY

1. W trapez równoramienny o obwodzie 20 i kącie ostrym $\frac{\pi}{6}$ można wpisać okrąg. Obliczyć promień okręgu oraz długości boków tego trapezu.

2. Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 64$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, których średnia arytmetyczna jest równa $\frac{14}{3}$, a jeden z pierwiastków jest równy średniej geometrycznej dwóch pozostałych. Wyznaczyć a i b oraz pierwiastki tego wielomianu.

3. Na okręgu o promieniu r opisano romb, którego dłuższa przekątna ma długość $4r$. Wyznaczyć pola wszystkich czterech figur ograniczonych bokami rombu i odpowiednimi łukami okręgu.

4. Przez punkt $(-1, 1)$ poprowadzono prostą tak, aby środek jej odcinka zawartego między prostymi $x + 2y = 1$ i $x + 2y = 3$ należał do prostej $x - y = 1$. Wyznaczyć równanie symetralnej odcinka.

5. W okręgu o środku w punkcie O i promieniu r poprowadzono dwie wzajemnie prostopadłe średnice AB i CD oraz cięciwę AE, która przecina średnicę CD w punkcie F. Dla jakiego kąta $\angle BAE$, czworokąt $OBEF$ ma dwa razy większe pole od pola trójkąta AFO?

6. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano trójkąt równoboczny ADB, którego pole jest dwa razy większe od pola trójkąta ABC. Wyznaczyć kąty trójkąta ABC oraz stosunek $|BK| : |KA|$ długości odcinków, na jakie punkt styczności K okręgu wpisanego w trójkąt ABC dzieli przeciwprostokątną.

PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Napisać równanie okręgu przechodzącego przez punkt $(1,2)$ stycznego do prostych $y=-2x$ i $y=-2x+20$.

2. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zaznaczono odpowiednio punkty E i D tak, że $\frac{|EC|}{|AE|}=\frac{|DC|}{|BD|}=2$. Wyznaczyć stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta ABF, gdzie F jest punktem przecięcia odcinków AD i BE.

3. Kąt przy wierzchołku C trójkąta ABC jest równy $\frac{\pi}{3}$, a długości boków AC i BC wynoszą odpowiednio 15 cm i 10 cm. Na bokach trójkąta zbudowano trójkąty równoboczne i otrzymano w ten sposób wielokąt o dodatkowych wierzchołkach D, E, F. Obliczyć odległość między wierzchołkami C i D, B i F oraz A i D?

4. Wielomian $W(x)=x^4-3x^3+ax^2+bx+c$ ma pierwiastek równy 1. Reszta z dzielenia tego wielomianu przez x^2-x-2 równa jest $4x-12$. Wyznaczyć a,b,c i pozostałe pierwiastki. Rozwiązać nierówność $W(x+1)\geqslant W(x-1)$.

5. Dane jest równanie
$$(2\sin\alpha-1)x^2-2x+\sin\alpha=0,$$
z niewiadomą x i parametrem $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Dla jakich wartości α suma odwrotności pierwiastków równania jest większa od $8\sin\alpha$, a dla jakich - suma kwadratów odwrotności pierwiastków jest równa $2\sin\alpha$?

6. W trójkąt równoramienny wpisano okrąg o promieniu r. Wyznaczyć pole trójkąta, jeżeli środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży na okręgu wpisanym w ten trójkąt.

XLI
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

grudzień 2011 r.

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Dane są punkty $A(1,2)$ oraz $B(-1,3)$. Znaleźć współrzędne wierzchołków C i D, jeśli $ABCD$ jest równoległobokiem, w którym $\sphericalangle DAB = \frac{\pi}{4}$, a $\sphericalangle ADB = \frac{\pi}{2}$.

2. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów określony przez układ nierówności
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2|x| > 0, \\ |y| \leqslant 2 - x^2. \end{cases}$$

3. W przedziale $[0,\pi]$ rozwiązać równanie
$$\frac{6 - 12\sin^2 x}{\mathrm{tg}^2 x - 1} = 8\sin^4 x - 5.$$

4. W sześcian o krawędzi długości a wpisano walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem, a osią jest przekątna sześcianu. Obliczyć objętość V walca. Nie wykonując obliczeń przybliżonych, uzasadnić, że V stanowi ponad 25% objętości sześcianu.

5. Znaleźć równania prostych prostopadłych do prostej $x + 2y + 4 = 0$ odcinających na okręgu $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 24$ cięciwy o długości 4. Znaleźć równanie tej przekątnej czworokąta wyznaczonego przez otrzymane cięciwy, która tworzy z osią Ox większy kąt.

6. Wysokość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi H, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę $\frac{3}{4}\pi$. Obliczyć objętość tego ostrosłupa oraz tangens kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy.

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Znaleźć równania okręgów o promieniu 2 przecinających okrąg $(x+2)^2+(y+1)^2=25$ w punkcie $P(1,3)$ pod kątem prostym. Korzystać z metod rachunku wektorowego.

2. Rozwiązać graficznie układ równań
$$\begin{cases} x^2+y^2=3+|4x+2|, \\ y^2=5-|x|, \end{cases}$$
wykonując staranne wykresy krzywych danych powyższymi równaniami oraz niezbędne obliczenia.

3. Rozwiązać równanie
$$\frac{\cos 6x}{\sin^4 x-\cos^4 x}=2\cos 4x+1.$$

4. W trójkącie ABC dany jest wierzchołek $B(-1,3)$. Prosta $y=x+1$ jest symetralną boku BC, a prosta $9x-3y-2=0$ symetralną boku AB. Obliczyć pole trójkąta ABC oraz tangens kąta α przy wierzchołku A. Uzasadnić, że $\frac{5\pi}{12}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, nie wykonując obliczeń przybliżonych.

5. W walec o promieniu podstawy R i wysokości tR, gdzie t jest parametrem dodatnim, wpisano mniejszy walec tak, aby był styczny do powierzchni bocznej i obu podstaw większego walca, a jego oś była prostopadła do osi większego walca. Wyrazić stosunek objętości mniejszego walca do objętości większego jako funkcję parametru t. Wyznaczyć największą wartość tego stosunku i odpowiadające mu wymiary obu walców. Podać warunki rozwiązalności zadania. Sporządzić odpowiednie rysunki.

6. Promień kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wynosi R. Wiadomo, że kąt płaski przy wierzchołku jest dwa razy większy niż kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy. Obliczyć objętość ostrosłupa i określić miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy.

XLI
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

styczeń 2012 r.

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3-\frac{1}{4}n^2-\frac{1}{2}n$ jest podzielna przez 6.

2. Niech $a=\log_{\frac{2}{5}}16+\log_{\frac{5}{2}}100$. Rozwiązać nierówność $\log_2(x^2+x)+\log_{\frac{1}{2}}a\leqslant 0$.

3. Rozwiązać równanie $\dfrac{\sin 4x}{\cos 2x}=-1$.

4. Obliczyć x, wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha=2^x$, $\operatorname{tg}\beta=2^{-x}$ oraz $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$. Wyznaczyć n tak, by $1+4^x+4^{2x}+\cdots+4^{(n-1)x}=121$.

5. Logarytmy z trzech liczb dodatnich tworzą ciąg arytmetyczny. Suma tych liczb równa jest 26, a suma ich odwrotności wynosi 0.7(2). Znaleźć te liczby.

6. O kącie α wiadomo, że $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

   a) Określić, w której ćwiartce jest kąt α.

   b) Obliczyć $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$ oraz $\sin\alpha-\cos\alpha$.

   c) Wyznaczyć $\operatorname{tg}\alpha$.

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Wykorzystując zasadę indukcji matematycznej udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots\binom{2n}{2}=\frac{(2n-1)n(2n+1)}{3}.$$

2. Dla jakiego parametru m równanie $x^3+(m-1)x^2-(2m^2+m)x+2m^2=0$ ma trzy pierwiastki tworzące ciąg arytmetyczny?

3. Rozwiązać nierówność $\log(1-2^x)+x\log 5\leqslant x(1+\log 2)+\log 6$.

4. Rozwiązać równanie

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=2-\operatorname{ctg} x.$$

   Podać interpretację geometryczną, sporządzając wykresy odpowiednich funkcji.

5. Dane są liczby: $m=\dfrac{\binom{6}{4}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{7}{3}}$, $\quad n=\dfrac{(\sqrt{2})^{-4}\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}\sqrt[4]{3}}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3\cdot 27^{-\frac{1}{4}}}$.

   a) Sprawdzić, wykonując odpowiednie obliczenia, że m,n są liczbami naturalnymi.
   b) Wyznaczyć k tak, by liczby m,k,n były odpowiednio: pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego.
   c) Wyznaczyć sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, którego pierwszymi trzema wyrazami są m,k,n. Ile wyrazów tego ciągu należy wziąć, by ich suma przekroczyła 95% sumy wszystkich wyrazów?

6. Rozwiązać równanie

$$1-\left(\frac{2^x}{3^x-2^x}\right)+\left(\frac{2^x}{3^x-2^x}\right)^2-\left(\frac{2^x}{3^x-2^x}\right)^3+\ldots=\frac{3^{x-2}}{2^{x-1}},$$

   którego lewa strona jest sumą wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

XLI
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

luty 2012 r.

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Obliczyć, ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, których suma cyfr wynosi 20 i które mają dokładnie jedno zero wśród swoich cyfr:

   a) jeżeli wszystkie cyfry muszą być różne,

   b) jeżeli cyfry mogą powtarzać się.

2. Do ponumerowania wszystkich stron grubej książki zecer zużył 2989 cyfr. Ile stron ma ta książka?

3. Zbiory A, B, C są skończone, przy czym

   $$|A| = 10, \ |B| = 9, \quad |A \cap B| = 3, \quad |A \cap C| = 1, \quad |B \cap C| = 1 \ \text{ oraz } \quad |A \cup B \cup C| = 18.$$

   Wyznaczyć liczbę elementów zbiorów $A \cap B \cap C$ oraz C.

4. Na egzamin z matematyki przygotowano i ogłoszono 45 zadań. Student nauczył się rozwiązywać tylko $\frac{2}{3}$ spośród nich. Na egzaminie student losuje trzy zadania. Otrzymuje ocenę bardzo dobrą za poprawne rozwiązanie trzech zadań, dobrą za rozwiązanie dwóch, dostateczną za rozwiązanie jednego i niedostateczną, gdy nie rozwiąże żadnego zadania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uzyska ocenę co najmniej dostateczną, a jakie - bardzo dobrą?

5. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba

   $$\frac{1}{25} \cdot 100^n + \frac{2}{5} \cdot 10^n + 1$$

   jest kwadratem liczby naturalnej i jest liczbą podzielną przez 9.

6. W urnie I są dwie kule białe i dwie czarne. W urnie II jest pięć kul białych i trzy czarne. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Jeżeli iloczyn otrzymanych oczek jest liczbą nieparzystą, to losujemy kulę z urny I, w przeciwnym przypadku losujemy kulę z urny II.

   a) Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej?

   b) Ile co najmniej razy należy powtórzyć opisane doświadczenie, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż $\frac{5}{7}$, co najmniej raz wyciągnąć kulę białą?

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Jest pięć biletów po 1 złoty, trzy bilety po 3 złote i dwa bilety po 5 złotych. Wybrano losowo trzy bilety. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: a) przynajmniej dwa z tych biletów mają jednakową wartość; b) wybrane bilety mają łączną wartość 7 złotych.

2. Korzystając z zasady indukcji matematycznej udowodnić, że nierówność
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$
jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n.

3. Dwie osoby rzucają na przemian monetą. Wygrywa ta osoba, która pierwsza wyrzuci orła. Obliczyć, ile wynoszą prawdopodobieństwa wygranej dla każdego z graczy. Następnie obliczyć prawdopodobieństwa wygranej obu graczy, gdy rozgrywka została zmieniona w następujący sposób: pierwszy gracz rzuca jeden raz monetą, a potem gracze rzucają monetą po dwa razy (zaczynając od drugiego gracza), aż do pierwszego wyrzucenia orła.

4. Ze zbioru liczb naturalnych n spełniających warunek $\frac{1}{\log n}+\frac{1}{1-\log n}>1$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby i tworzymy z nich liczbę dwucyfrową, w której cyfrą dziesiątek jest pierwsza z wylosowanych liczb. Sprawdzić niezależność zdarzeń: A - utworzona liczba jest parzysta, B - utworzona liczba jest podzielna przez 3.

5. Obliczyć, ile liczb mniejszych od 100 nie jest podzielnych przez $2,3,5$ ani przez 7. Udowodnić, że wszystkie te liczby oprócz 1 są pierwsze. Ile jest liczb pierwszych mniejszych od 100?

6. Dla każdej drużyny piłkarskiej biorącej udział w Euro 2012 eksperci wyznaczyli współczynnik p oznaczający prawdopodobieństwo, że Polska pokona tę drużynę. Drużyny podzielono na cztery koszyki. Z każdego koszyka do każdej grupy zostanie wylosowana jedna drużyna, tak że po zakończeniu losowania powstaną cztery grupy po cztery drużyny. Polska znajduje się w koszyku A. Pozostałe koszyki to:
B: Niemcy ($p=0,2$), Włochy ($p=0,2$), Anglia ($p=0,4$), Rosja ($p=0,5$);
C: Chorwacja ($p=0,6$), Grecja ($p=0,6$), Portugalia ($p=0,4$), Szwecja ($p=0,6$);
D: Dania ($p=0,4$), Francja ($p=0,4$), Czechy ($p=0,6$), Irlandia ($p=0,5$).

   a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że do grupy z Polską trafią przynajmniej dwie drużyny, których p jest większe lub równe $0,5$?

   b) Gospodarz Euro 2012, Polska, ma prawo do następującej modyfikacji: z losowo wybranego koszyka zostaną wylosowane do grupy z nią dwie drużyny, a z innego losowo wybranego koszyka nie będzie losowana żadna. Czy Polsce opłaca się skorzystać z tego prawa, jeśli chce powiększyć prawdopodobieństwo zdarzenia z punktu a)?

XLI
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

marzec 2012 r.

PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Narysować wykres funkcji $f(x) = |2x-4| - \sqrt{x^2+4x+4}$. Określić liczbę rozwiązań równania $|f(x)| = m$ w zależności od parametru m. Dla jakiego m pole trójkąta ograniczonego wykresem funkcji f oraz prostą $y = m$ równe jest 6?

2. Wśród prostokątów o ustalonej długości przekątnej p wskazać ten, którego pole jest największe. Nie stosować metod rachunku różniczkowego.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, dla których funkcja $f(x) = x - 1 - \log_{\frac{1}{3}}(4 - 3^x)$ przyjmuje wartości nieujemne.

4. Stosując wzór na cosinus podwojonego kąta, rozwiązać w przedziale $[0, 2\pi]$ nierówność
$$\cos 2x \leqslant \frac{\cos 2x + \sin x - \cos^2 x}{1 - \sin x}.$$

5. Niech $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{dla} \quad x \leqslant 1, \\ 1 + \frac{2}{x} & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$

   a) Sporządzić wykres funkcji f i na jego podstawie wyznaczyć zbiór wartości tej funkcji.

   b) Obliczyć $f(\sqrt{3} - 1)$ i korzystając z wykresu zaznaczyć na osi $0x$ zbiór rozwiązań nierówności $f^2(x) \leqslant 4$.

6. W kulę o promieniu R wpisano stożek o kącie rozwarcia $\frac{\pi}{3}$ oraz walec o tej samej podstawie, co stożek. Obliczyć stosunek pola powierzchni bocznej stożka do pola powierzchni bocznej walca.

PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Uzasadnić, że punkty przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych dowolnego równoległoboku są wierzchołkami prostokąta, którego przekątna ma długość równą różnicy długości sąsiednich boków równoległoboku.

2. Wśród walców wpisanych w kulę o promieniu R wskazać ten, którego pole powierzchni bocznej jest największe. Nie stosować metod rachunku różniczkowego.

3. Dane są punkty $A(-1,2)$, $B(1,-4)$ oraz $P(2m,4m^3-1)$. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru m, dla których ΔABP jest prostokątny. Rozwiązanie zilustrować starannym rysunkiem.

4. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x^2+y^2-8=0 \\ xy+x-y=0 \end{cases}$$
i podać jego interpretację graficzną.

5. W przedziale $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ rozwiązać nierówność
$$1-\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^3 x+\cdots>\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\operatorname{ctg} x),$$
której lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

6. Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywistego parametru m, dla których równanie
$$(m^2-2)4^x\;+\;2^{x+1}\;+\;m\;=\;0$$
ma dwa różne rozwiazania.

XLI
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

kwiecień 2012 r.

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Wyznaczyć równanie paraboli, której wykres jest symetryczny względem punktu $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ do wykresu paraboli $y = (x+2)^2$. Wykazać, że punkty przecięcia i wierzchołki obu parabol są wierzchołkami równoległoboku i obliczyć jego pole.

2. W graniastosłup prawidłowy trójkątny można wpisać kulę. Wyznaczyć stosunek pola powierzchni bocznej do sumy pól obu podstaw oraz cosinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej.

3. Uzasadnić, że dla $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ równanie
$$2x^2 - 2(2\cos\alpha - 1)x + 2\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 2 = 0$$
nie ma pierwiastków tego samego znaku.

4. Punkty przecięcia prostych $x-y=0, x+y-4=0, x-3y=0$ są wierzchołkami trójkąta. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu tego trójkąta dookoła najdłuższego boku.

5. Trzech pracowników ma wykonać pewną pracę. Aby wykonać tę pracę samodzielnie, pierwszy z nich pracowałby o 7 dni dłużej, drugi $-$ o 15 dni dłużej, a trzeci $-$ trzy razy dłużej, niż gdyby pracowali razem. W jakim czasie wykonają tę pracę wspólnie?

6. Wyznaczyć promień kuli stycznej do wszystkich krawędzi czworościanu foremnego o krawędzi a.

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać nierówność $\dfrac{x}{\sqrt{x^3-2x+1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.

2. Narysować staranny wykres funkcji

$$f(x) = \frac{\sin 2x - |\sin x|}{\sin x}.$$

   Następnie w przedziale $[0, \pi]$ wyznaczyć rozwiązania nierówności

$$f(x) < 2(\sqrt{2}-1)\cos^2 x$$

3. Rozwiązać nierówność

$$1 + \frac{\log_2 x}{1+\log_2 x} + \left(\frac{\log_2 x}{1+\log_2 x}\right)^2 + \cdots \geqslant 2\log_2 x,$$

   której lewa strona jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego.

4. Objętość stożka jest 4 razy miejsza niż objętość opisanej na nim kuli. Wyznaczyć stosunek pola powierzchni całkowitej stożka do pola powierzchni kuli oraz kąt, pod jakim tworząca stożka jest widoczna ze środka kuli.

5. Promień światła przechodzi przez punkt $A(1,1)$, odbija się od prostej o równaniu $y = x - 2$ (zgodnie z zasadą mówiącą, że kąt padania jest równy kątowi odbicia) i przechodzi przez punkt $B(4,6)$. Wyznaczyć współrzędne punktu odbicia P oraz równania prostych, po których biegnie promień przed i po odbiciu.

6. Na boku BC trójkąta równobocznego obrano punkt D tak, że promień okręgu wpisanego w trójkąt ADC jest dwa razy mniejszy niż promień okręgu wpisanego w trójkąt ABD. W jakim stosunku punkt D dzieli bok BC?