XLIV
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

październik 2014 r.

PRACA KONTROLNA nr 2 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Wykaż, że jeżeli $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ i $\sqrt{a^2+b} = \sqrt{b^2+a}$, to $a = b$ lub $a + b = 1$.

2. Trójkąt równoramienny jest wpisany w okrąg o promieniu R, a promienie poprowadzone z wierzchołków podstawy tworzą kąt 60°. Oblicz pole trójkąta i wyznacz jego kąty.

3. Umowa określa wynagrodzenie miesięczne pana Kowalskiego na kwotę $4\,000$ zł. Składka na ubezpieczenie społeczne wynosi $18,7\%$ tej kwoty, a składka na ubezpieczenie zdrowotne - $7,75\%$ kwoty pozostałej po odliczeniu składki na ubezpieczenie społeczne. W celu obliczenia podatku należy od 80% wyjściowej kwoty umowy odjąć składkę na ubezpieczenie społeczne i wyznaczyć 19% pozostałej sumy. Podatek jest różnicą tak otrzymanej kwoty i składki na ubezpieczenie zdrowotne. Ile złotych miesięcznie otrzymuje pan Kowalski? Jakie powinno być jego wynagrodzenie, by co miesiąc dostawał przynajmniej $3\,000$ zł?

4. Liczba
$$p = \frac{(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \cdot \log_{(\sqrt{2}-1)}(3-2\sqrt{2})}{3^{-\frac{3}{4}} \cdot \log_{\sqrt{3}}(3\sqrt{3})}$$
jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$. Wyznacz a, b, c i pozostałe pierwiastki tego wielomianu, wiedząc, że średnia arytmetyczna wszystkich trzech pierwiastków jest równa $-\dfrac{1}{3}$, a ich średnia geometryczna wynosi -2.

5. Sprowadź wyrażenie
$$\left[a^{-1} + b^{-1} + 2\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \cdot \frac{ab - a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$$
do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a = \sqrt{2} - 1$, $b = \sqrt{2} + 1$. Dla jakich wartości a i b ma ono sens?

6. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{8}{3}x + 2, & \text{gdy} \quad |2x-5| \leqslant 3, \\ 4 - 2|x-3|, & \text{gdy} \quad |2x-5| > 3 \end{cases}$
i na jego podstawie wyznacz:
   a) zbiór wartości funkcji $f(x)$,
   b) najmniejszą i największą wartość funkcji w przedziale $[0, 5]$,
   c) przedziały, na których funkcja f jest malejąca.

PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Wykaż, że jeżeli $a > 0$, $b > 0$ i $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = \sqrt{a^2 + b^2}$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{2}{3}$.

2. Przekątne czworokąta wpisanego w okrąg przecinają się pod kątem 45°. Punkt przecięcia dzieli jedną z nich na odcinki o długościach 8 i 6, a drugą – na odcinki, których długości pozostają w stosunku $2:3$. Oblicz boki i pole czworokąta.

3. W hurtowni znajduje się towar, którego $a\,\%$ sprzedano z zyskiem $p\,\%$, a $b\,\%$ pozostałej części sprzedano z zyskiem $q\,\%$. Z jakim zyskiem należy sprzedać resztę towaru, by całkowity zysk wyniósł $r\,\%$?

4. Porównaj liczby a^b i b^a, gdzie $a = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{6}$, $b = \left(\sqrt{3}^{\sqrt{3}+1}\right)^{\sqrt{3}-1}$, nie używając kalkulatora.

5. Liczba
$$p = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}},$$
jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $W(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x - 2p$, równa jest 3. Wyznacz współczynniki a, b, c i rozłóż wielomian na czynniki liniowe.
WSKAZÓWKA. Oblicz p^3.

6. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x}, & \text{gdy} \quad |x-2| \leqslant 1, \\ \dfrac{x}{x-2}, & \text{gdy} \quad |x-2| > 1 \end{cases}$
i na jego podstawie wyznacz:
   a) przedziały, na których funkcja f jest malejąca,
   b) zbiór wartości funkcji $f(x)$,
   c) zbiór rozwiązań nierówności $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 października 2014r.** na adres:

```
Instytut Matematyki i Informatyki
Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW.
```

Na kopercie prosimy koniecznie zaznaczyć wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres internetowy Kursu: http://www.im.pwr.edu.pl/kurs