XLIV
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

marzec 2015 r.

PRACA KONTROLNA nr 7 -POZIOM PODSTAWOWY

1. Współczynniki a, b trójmianu kwadratowego $x^2 - 2ax + b$ oraz pierwiastki tego trójmianu, napisane w odpowiedniej kolejności, są czterema początkowymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Dla $a = 2$ obliczyć różnicę ciągu, współczynnik b oraz pierwiastki trójmianu.

2. Kwadrat o boku a zgięto wzdłuż jednej z przekątnych tak, aby odległość pozostałych wierzchołków była równa połowie długości przekątnej kwadratu. W tak powstały czworościan wpisano dwie identyczne, wzajemnie styczne kule. Obliczyć promień tych kul.

3. Trzy czerwone, trzy żółte i jedną zieloną kredkę włożono w przypadkowy sposób do pudełka. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że żadne dwie kredki tego samego koloru nie będą leżały obok siebie.

4. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log_2 x}{1 - \log_2 x}}$. Uzasadnić, że $f(x)$ jest rosnąca. Korzystając z tego faktu, określić zbiór wartości funkcji $f(x)$.

5. W ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisano prostopadłościan prosty o podstawie kwadratowej w ten sposób, że wierzchołki jego górnej podstawy leżą w środkach ciężkości ścian bocznych ostrosłupa. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu stanowi trzecią część pola powierzchni całkowitej ostrosłupa. Obliczyć tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do podstawy.

6. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases} .$$
Podać interpretację geometryczną tego układu i sporządzić rysunek.

PRACA KONTROLNA nr 7 -POZIOM ROZSZERZONY

1. Na każdym z trzech drutów linii elektrycznej wysokiego napięcia siedzi po pięć wróbli. W pewnej chwili odfrunęło przypadkowych sześć wróbli. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że na co najmniej dwóch drutach pozostała taka sama liczba ptaków.

2. Dolna część namiotu ma kształt walca o wysokości $h = 2\,\mathrm{m}$, a górna jest stożkiem o tworzącej $l = \sqrt{15}\,\mathrm{m}$ i tym samym promieniu, co część dolna. Wyznaczyć pozostałe parametry namiotu tak, aby jego objętość była największa. Sporządzić rysunek.

3. Z pudełka zawierającego 10 klocków ponumerowanych cyframi od 0 do 9 wylosowano dwa klocki i ustawiono obok siebie w przypadkowej kolejności, tworząc w ten sposób liczbę k (ustawienie 03 rozumiemy jako liczbę 3). Następnie wylosowano trzeci klocek z pozostałych i ustawiono go za tamtymi, gdy suma cyfr liczby k była mniejsza niż 10, lub przed tamtymi, w przeciwnym wypadku. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest większa od 500.
   Wsk. Użyć wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

4. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić tożsamość

$$\sin^2\alpha + \sin^2 3\alpha + ... + \sin^2(2n-1)\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\sin 4n\alpha}{4\sin 2\alpha}, \quad n \geqslant 1,$$

   gdzie $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, k całkowite.

5. Znaleźć równanie stycznej l do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$ w punkcie, w którym przecina on oś Ox. Wyznaczyć wszystkie styczne, które są równoległe do prostej l. Znaleźć punkty wspólne tych stycznych z wykresem funkcji. Rozwiązanie zilustrować odpowiednim rysunkiem.

6. Krawędź podstawy graniastosłupa trójkątnego prawidłowego ma długość a. Oznaczmy przez 2α kąt między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka. Graniastosłup przecięto na dwie części płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i przeciwległy wierzchołek górnej podstawy. Obliczyć tangens kąta α, dla którego w większą część graniastosłupa można wpisać kulę. Dla znalezionego kąta α, obliczyć promień kuli wpisanej w mniejszą część graniastosłupa.