

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Udowodnić, że różnica kwadratów dwu dowolnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 3 jest podzielna przez 3.

2. Rozwiązać równanie

$$\sin^2\left(\frac{\pi+x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi-x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi-x}{2}\right) = 1$$

w przedziale $[0, 2\pi]$.

3. Dla jakiego parametru m równanie

$$(\log_2^2 m - 1) \cdot x^2 + 2(\log_2 m - 1) \cdot x + 2 = 0$$

ma tylko jedno rozwiązanie?

4. Jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat o boku a , jest prostopadła do podstawy. Najdłuższa krawędź boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 60° . Obliczyć pole powierzchni całkowitej oraz sumę długości krawędzi ostrosłupa. Sporządzić rysunek.

5. Jaką krzywą tworzą punkty płaszczyzny, z których odcinek o końcach $A(1, 0)$ i $B(0, 1)$ jest widoczny pod kątem 30° .

6. Narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{|x+1| - 1}{|x-1|}$ i na jego podstawie wyznaczyć przedziały jej monotoniczności oraz najmniejszą wartość w przedziale $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$.

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Udowodnić tożsamość

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

i wykorzystując ją, usunąć niewymierność z mianownika ułamka $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$.

2. Jaka krzywą tworzą środki wszystkich okręgów stycznych równocześnie do osi Ox i do okręgu $x^2 + (y - 1)^2 = 1$?

3. Wyznaczyć wszystkie styczne do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x - 3}{x - 2}$ prostopadłe do prostej $4x + y + 1 = 0$. Sporządzić staranne wykresy wszystkich rozważanych krzywych.

4. Narysować wykres funkcji

$$f(x) = 1 - \frac{2^x}{1 - 2^x} + \left(\frac{2^x}{1 - 2^x}\right)^2 - \left(\frac{2^x}{1 - 2^x}\right)^3 + \left(\frac{2^x}{1 - 2^x}\right)^4 - \dots$$

będącej sumą nieskończonego szeregu geometrycznego. Rozwiązać nierówność

$$f(x) > 4^x - 21 \cdot 2^{x-2} + 2.$$

5. Dla jakiego parametru m równanie

$$(\log_4 m + 1) \cdot x^2 + 3 \log_4 m \cdot x + 2 \log_4 m - 1 = 0$$

ma dwa pierwiastki x_1, x_2 spełniające warunki: $x_1 < x_2$, oraz $2(x_2^2 - x_1^2) > x_2^4 - x_1^4$?

6. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym tangens kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy jest równy $2\sqrt{3}$. Obliczyć stosunek objętości kuli wpisanej do objętości kuli opisanej na ostrosłupie.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 stycznia 2016 r.** na adres:

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.wroc.pl/kurs>