XLV
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

luty 2016 r.

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Andrzej przebiegł maraton, pokonując drugą połowę trasy 10% wolniej od pierwszej. Bernard, biegnąc początkowo w tempie narzuconym przez Andrzeja, w połowie czasu biegu zwolnił o 10%. Ustal, który z biegaczy pierwszy przekroczył linię mety.

2. Niech p będzie liczbą pierwszą, $p \geqslant 7$. Uzasadnij, że liczba $p^2 - 49$ jest podzielna przez 24.

3. Rozwiąż równanie
$$12\cos^2 3x \cdot \sin^2 2x + \sin^2 3x = 4\sin^2 3x \cdot \sin^2 2x + 3\cos^2 3x.$$

4. Wyznacz wszystkie argumenty x, dla których funkcja
$$f(x) = \log_3(x^2 - x) - \log_9(x^2 + x - 2)$$
przyjmuje wartości dodatnie.

5. Przekątna rombu o obwodzie 12 jest zawarta w prostej $x - 2y = 0$, a punkt $A(1,3)$ jest jednym z jego wierzchołków. Wyznaczyć współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu i obliczyć jego pole. Wykonać staranny rysunek.

6. Narysuj wykres funkcji
$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^6 x + \cos^6 x.$$
Znajdź wszystkie liczby z przedziału $[0, 2\pi]$ spełniające nierówność $8f(x) > 19$. Zastosuj wzory $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ oraz $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Na nowym osiedlu wybudowano sześć budynków. Każdy zostanie pomalowany na jeden z trzech kolorów, a każdy kolor zostanie wykorzystany co najmniej raz. Ustal, na ile sposobów można pomalować te budynki.

2. Zbadaj, dla jakich argumentów x funkcja
$$f(x) = 7^{x^4} \cdot 49^x \cdot 5^{2x^3+x^2} - 5^{x^4-2} \cdot 25^{x+1} \cdot 49^{x^3+\frac{1}{2}x^2}$$
przyjmuje wartości dodatnie.

3. Rozwiąż równanie
$$\operatorname{tg}^2 x = \Big(4\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 1\Big)\Big(1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \dots\Big).$$

4. Wskaż wszystkie wartości x, dla których suma nieskończonego ciągu geometrycznego
$$S(x) = 2^{-2\sin 3x} + 2^{-4\sin 3x} + 2^{-6\sin 3x} + \dots + 2^{-2n\sin 3x} + \dots$$
nie przekracza jedności.

5. Rozwiąż nierówność logarytmiczną
$$\log_{x+1}(x^3 - x) \geqslant \log_{x+1}(x+2) + 1.$$

6. Boki $\triangle ABC$ zawarte są w prostych $y = 4$, $y = 1 - mx$ oraz $y = 2(x - m)$. Wyznacz wszystkie wymierne wartości parametru m, dla których pole rozważanego trójkąta wynosi $|\triangle ABC| = 12$. Dla każdej wyznaczonej wartości m wykonaj odpowiedni rysunek.

Rozwiązania prosimy nadsyłać do dnia **18 lutego 2016** na adres:

`Wydział Matematyki`
`Politechniki Wrocławskiej`
`Wybrzeże Wyspiańskiego 27`
`50-370 Wrocław.`

Na kopercie prosimy koniecznie zaznaczyć wybrany poziom. Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres internetowy Kursu: `http://www.im.pwr.edu.pl/kurs`