

**PRACA KONTROLNA nr 7 -POZIOM PODSTAWOWY**

1. Cztery cyfry 0 i pięć cyfr 1 ustawiono w przypadkowej kolejności. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że na obu końcach powstałego ciągu znalazły się jednakowe cyfry.
2. Drugi wyraz pewnego ciągu geometrycznego wynosi 8, a ósmy 2. Obliczyć siedemnasty wyraz tego ciągu oraz sumę piętnastu wyrazów, poczynając od wyrazu trzeciego. Wynik zapisać w najprostszej postaci.

3. Rozwiązać nierówność

$$\sqrt{2^{x-2} - 2} \leq 2^{x-1} - 5.$$

4. Dana jest funkcja  $f(x) = \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ . Znaleźć wszystkie wartości parametru rzeczywistego  $a$ , dla których równanie  $f(x) = 2^a$  posiada rozwiązanie. Sporządzić wykres funkcji  $f(x)$ .
5. Romb o boku  $a$  i kącie ostrym  $\alpha$  zgięto wzdłuż prostej łączącej środki przeciwległych boków, tak aby obie części rombu były wzajemnie prostopadłe. Obliczyć odległość wierzchołków kątów ostrych oraz cosinus kąta pomiędzy połowami krótszej przekątnej w zgiętym rombie.
6. Długości boków trapezu opisanego na okręgu są liczbami naturalnymi i są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Obwód trapezu wynosi 24. Obliczyć pole oraz dłuższą przekątną trapezu.

## PRACA KONTROLNA nr 7 -POZIOM ROZSZERZONY

1. Spośród 12 pączków, leżących na półmisku, 6 było nadziewanych, 6 lukrowanych, a 4 nie miały nadzienia ani nie były lukrowane. Franek zjadł dwa losowo wybrane pączki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jadł zarówno pączka lukrowanego jak i pączka z nadzieniem.
2. Na krzywej o równaniu  $y = \sqrt{4-x}$ ,  $x \geq 0$ , znaleźć punkt  $P$ , tak aby odcinek łączący  $P$  z początkiem układu współrzędnych, przy obrocie wokół osi  $Ox$ , zakreślił powierzchnię o największym polu. Sporządzić rysunek.
3. Wyznaczyć punkty przecięcia się wykresu funkcji  $f(x) = \frac{3x-7}{2x-2}$  z wykresem jej pochodnej  $f'(x)$ . Korzystając ze wzoru  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ , obliczyć tangensy kątów, pod którymi przecinają się te wykresy. Rozwiązanie zilustrować odpowiednim rysunkiem.
4. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić nierówność

$$2\sqrt{n} - \frac{3}{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1, \quad n \geq 1.$$

Dla jakich  $n$  nierówność ta pozwala na oszacowanie występującej w niej sumy z błędem względnym mniejszym niż 1%.

5. Z punktu  $P$  widać okrąg o środku  $O$  i promieniu  $r$  pod kątem  $2\alpha$ . Prosta  $PO$  przecina okrąg w punktach  $A$  i  $C$ , a styczne do okręgu, poprowadzone z punktu  $P$ , przechodzą przez punkty  $B$  i  $D$  na okręgu. Obliczyć promień okręgu wpisanego w czworokąt  $ABCD$  oraz odległość środków obu okręgów.
6. Podstawą ostrosłupa jest romb o boku 5. Spodek wysokości ostrosłupa leży w środku podstawy, a krawędzie boczne mają długości 6 i 7. Obliczyć objętość ostrosłupa oraz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy.