

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Dwa samochody wyjechały jednocześnie z jednego miejsca i jadą w tym samym kierunku. Pierwszy jedzie z prędkością 50 km/h, a drugi z prędkością 40 km/h. Pół godziny później z tego samego miejsca i w tym samym kierunku wyruszył trzeci samochód, który dopędził pierwszy samochód o 1 godzinę i 30 minut później niż drugi. Z jaką prędkością jechał trzeci samochód?
2. Proste $y = 2$, $y = 2x + 10$ oraz $4x + 3y = 0$ wyznaczają trójkąt ABC . Otrzymany trójkąt przekształcono używając najpierw jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali $k = 3$, a następnie symetrii względem osi OX . Wyznaczyć współrzędne trójkąta ABC oraz współrzędne obrazów jego wierzchołków. Obliczyć pole trójkąta ABC i jego obrazu w tym przekształceniu.
3. Rozważmy zbiór wszystkich prostokątów wpisanych w kwadrat o boku długości a w taki sposób, że boki tego prostokąta są parami równoległe do przekątnych danego kwadratu. Obliczyć długości boków tego prostokąta, który ma największe pole.
4. Podstawą trójkąta równobocznego jest średnica koła o promieniu r . Obliczyć stosunek pola powierzchni części trójkąta leżącej na zewnątrz koła do pola powierzchni części trójkąta leżącej wewnątrz koła.
5. W stożku pole podstawy, pole powierzchni kuli wpisanej w ten stożek i pole powierzchni bocznej stożka, tworzą ciąg arytmetyczny. Znaleźć cosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny jego podstawy.
6. Okrąg O_1 o promieniu 1 jest styczny do ramion kąta o mierze $\frac{\pi}{3}$. Mniejszy od niego okrąg O_2 jest styczny zewnętrznie do niego i obu ramion tego kąta. Procedurę kontynuujemy. Znaleźć sumę obwodów pięciu otrzymanych kolejno w ten sposób okręgów. Dla jakiego n suma obwodów ciągu tych okręgów jest większa od $\frac{299}{100}\pi$?

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Do punktu A po dwóch prostoliniowych drogach jadą ze stałymi prędkościami samochód i rower. W chwili początkowej samochód, rower i punkt A tworzą trójkąt prostokątny. Gdy samochód przejechał 25 km trójkąt, którego dwa wierzchołki przesunęły się, stał się trójkątem równobocznym. Znaleźć odległość między samochodem a rowerem w chwili początkowej, jeśli w momencie dotarcia samochodu do punktu A rower miał jeszcze do przejechania 12 km.
2. Na płaszczyźnie dane są punkty A i B . Udowodnij, że złożenie symetrii środkowej względem punktu A z przesunięciem o wektor \overrightarrow{AB} jest symetrią środkową względem środka odcinka \overline{AB} .
3. Wyznaczyć największą wartość pola prostokąta, którego dwa wierzchołki leżą na paraboli $y = x^2 - 4x + 4$, a dwa pozostałe na cięciwie paraboli wyznaczonej przez prostą $y = 3$.
4. Suma trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi 6, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu równa się $\frac{16}{3}$. Dla jakich n naturalnych spełniona jest nierówność $|S - S_n| < \frac{1}{96}$?
5. Dwa jednakowe stożki złożono podstawami. Obliczyć objętość powstałej bryły, jeśli promień kuli wpisanej w tę bryłę wynosi R , a punkt styczności kuli i stożka dzieli tworzącą stożka w stosunku m do n ?
6. W czworościan foremny $ABCD$ o krawędzi długości d wpisano kulę. Prowadzimy płaszczyzny równoległe do ścian czworościanu i styczne do wpisanej kuli odcinając w ten sposób cztery przystające czworościany foremne. W każdy z nich wpisujemy kulę i postępujemy analogicznie jak z kulą wpisaną w czworościan $ABCD$. Obliczyć sumę objętości wszystkich kul wpisanych w otrzymane czworościany, jeśli proces ten kontynuujemy nieskończenie wiele razy.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 grudnia 2016r.** na adres:

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres internetowy Kursu: <http://www.wmat.pwr.wroc.pl/kurs>