

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Rozwiązać równanie

$$\frac{\sin x}{2 \cos^2 2x - 1} = 1.$$

2. Niech $f(x) = \sqrt{x}$. Podać wzór funkcji:

- a) $g(x)$, której wykres jest symetrycznym obrazem wykresu $f(x)$ względem prostej $x = 1$.
b) $h(x)$, której wykres jest symetrycznym obrazem wykresu $f(x)$ względem punktu $(0, -1)$.
Narysować wykresy wszystkich funkcji. Uzasadnić, wykonując odpowiednie obliczenia, że znalezione funkcje spełniają podane warunki.

3. Wykazać, że dla dowolnego $n \geq 2$ liczba $\frac{1}{4} \cdot 100^n + 4 \cdot 10^n + 16$ jest kwadratem liczby naturalnej i jest podzielna przez 81.

4. Narysować wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x - x^2 & , \text{gd}y \quad -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{x-1}{x+1} & , \text{gd}y \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Posługując się wykresem, podać zbiór wartości funkcji f oraz jej najmniejszą i największą wartość na przedziałach $[-1, 2]$ oraz $[0, 3]$.

5. Znaleźć równanie stycznej l do paraboli $y = x^2$ równoległej do prostej $y = 2x - 3$.
Wyznaczyć punkt, w którym styczna do tej paraboli jest prostopadła do znalezionej prostej l . Sporządzić rysunek.

6. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$$

i podać jego interpretację geometryczną.

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Niech $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$. Podać i uzasadnić wzór funkcji, której wykres jest obrazem symetrycznym wykresu funkcji $f(x)$ względem prostej $x = 2$. Sporządzić wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych.

2. Stosując zasadę indukcji matematycznej, udowodnić prawdziwość wzoru

$$\binom{2}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{2n}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

3. Wykorzystując metody rachunku różniczkowego znaleźć zbiór wartości funkcji

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$$

na przedziale $[-1, 4]$. Wyznaczyć przedziały o długości 1, w których znajdują się miejsca zerowe tej funkcji i sporządzić jej wykres.

4. Znaleźć równanie stycznej l do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2}{x} + x^2$ w punkcie przecięcia z prostą $y = x$. Wyznaczyć wszystkie styczne równoległe do znalezionej prostej l .

5. Narysować wykres funkcji

$$f(x) = 1 + \frac{\sin x}{1 + \sin x} + \left(\frac{\sin x}{1 + \sin x}\right)^2 + \left(\frac{\sin x}{1 + \sin x}\right)^3 + \left(\frac{\sin x}{1 + \sin x}\right)^4 + \dots,$$

gdzie prawa strona jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego. Rozwiązać nierówność

$$f(x) > \sqrt{3} \cos x.$$

6. Wyznaczyć liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y = x^2 - p. \end{cases}$$

w zależności od parametru p . Podać interpretację geometryczną układu.

Rozwiązania prosimy nadsyłać do dnia **18 lutego 2017** na adres:

Wydział Matematyki
Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław.

Na kopercie prosimy koniecznie zaznaczyć wybrany poziom. Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>