XLVI
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

marzec 2017 r.

PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego jest $a_1 = 2017$, a jego różnica jest rozwiązaniem równania $\sqrt{2-x} - x = 10$. Obliczyć sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu.

2. Spośród dwucyfrowych liczb nieparzystych mniejszych od 50 wylosowano bez zwracania dwie. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że obie wylosowane liczby są pierwsze oraz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn wylosowanych liczb nie jest podzielny przez 15.

3. Uzasadnić, że ciąg o wyrazach $a_n = \dfrac{2^n + 2^{n+1} + ... + 2^{2n}}{2^2 + 2^4 + ... + 2^{2n}}$, $n \geq 1$, nie jest rosnący oraz, że jest rosnący, poczynając od $n = 2$.

4. Znaleźć wszystkie wartości parametru rzeczywistego m, dla których proste o równaniach $x - my + 2m = 0$, $2mx + 4y + 1 = 0$, $mx - y - 3m - 1 = 0$ są parami różne i przecinają się w jednym punkcie. Sporządzić odpowiedni rysunek dla najmniejszej ze znalezionych wartości tego parametru.

5. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dana jest odległość d środka podstawy od krawędzi bocznej oraz kąt 2α między sąsiednimi ścianami bocznymi. Obliczyć objętość ostrosłupa.

6. Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC jest krótsza od ramion. Wysokości AD i CE dzielą trojkąt na cztery części, z których dwie są trójkątami prostokątnymi o polach równych 9 oraz 2. Obliczyć pola pozostałych części oraz obwód trójkąta.

XLVI
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

marzec 2017 r.

PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Turysta zabłądził w lesie zajmującym obszar (w km)
$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2y + 3,\ -2y \leq x \leq y\}.$$
Wskazać mu najkrótszą drogę wyjścia z lasu, jeśli znaduje się w punkcie $P\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$. Ile minut będzie trwała wędrówka, jeśli idzie z prędkością 4 km/h?

2. Korzystając z zasady indukcji matematycznej, udowodnić prawdziwość nierówności
$$1^5 + 2^5 + ... + n^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6},\ n \geq 1.$$

3. Kubuś zaobserwował, że w pewnej chwili w trzypiętrowej kamienicy po drugiej stronie ulicy pali się światło w 10 oknach. Na każdej kondygnacji kamienicy znajdują się 4 okna. Zakładamy, że okna zapalają się i gasną losowo. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że zarówno na drugim jak i na trzecim piętrze kamienicy świecą się co najmniej dwa okna. **Wsk.** Skorzystać ze wzoru $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

4. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości $h = 2$ jest trójkąt, w którym tangens kąta przy wierzchołku A wynosi $-\sqrt{2}$. Przekątne e, f sąsiednich ścian bocznych, wychodzące z wierzchołka A, są do siebie prostopadłe, a liczby h, e, f są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Obliczyć objętość graniastosłupa.

5. Znaleźć dziedzinę i zbiór wartości funkcji
$$f(x) = \sqrt{\log_2 \frac{1}{\cos x + \sqrt{3} \sin x}}.$$

6. Kąt płaski przy wierzchołku D ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o podstawie ABC jest równy α. Na krawędzi BD wybrano punkt E tak, że $\triangle ACE$ jest trójkątem równobocznym. Znaleźć stosunek $k(\alpha)$ objętości ostrosłupa $ABCE$ do objętości ostrosłupa $ACED$ w zależności od kąta α. Sporządzić wykres funkcji $k(\alpha)$.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do 18 marca 2017 r. na adres:

Wydział Matematyki
Politechniki Wrocławskiej,
ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27,
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy <u>koniecznie</u> zaznaczyć wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu (od 1.01.2017 nowe ceny znaczków!). Prace nie spełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres Internetowy Kursu: http://