

PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Uprościć następujące wyrażenie, określwszy uprzednio jego dziedzinę:

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a^3b^2} - \sqrt[6]{b^5}} \left(\sqrt[3]{a^2} - \frac{b}{\sqrt[3]{a}} \right) + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt[3]{ab}}{a-b}$$

Obliczyć wartość tego wyrażenia, przyjmując $a = 3 + 2\sqrt{2}$ i $b = 1 + \sqrt{2}$.

2. Niech B oznacza dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$, a $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x^2-1|} \geq 4 \right\}$.
Wyznaczyć i zaznaczyć na osi liczbowej zbiory A , B , $A \cap B$, $A \cup B$ oraz $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
3. Podać wzór funkcji kwadratowej, której wykres jest symetrycznym odbiciem wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 2x$ względem: a) prostej $x = 1$, b) punktu $(0, 0)$, c) punktu $(1, 0)$.
Odpowiedź uzasadnić, przeprowadzając odpowiednie obliczenia. Sporządzić staranne wykresy wszystkich rozważanych funkcji.
4. W pewnym ciągu arytmetycznym różnica piętnastego i drugiego wyrazu jest równa 13. Oblicz $a_{30} - a_4$ oraz sumę pierwszych dziesięciu wyrazów o numerach nieparzystych, wiedząc, że suma pierwszych dziesięciu wyrazów o numerach parzystych jest równa 125.
5. Przekątne trapezu prostokątnego o podstawach 3 i 4 przecinają się pod kątem prostym. Obliczyć obwód i pole trapezu. Sporządzić rysunek.
6. Ostrosłup prawidłowy, którego podstawą jest kwadrat o boku a , przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wysokość ostrosłupa i przekątną podstawy. Pole otrzymanego przekroju jest równe polu podstawy. Wyznaczyć pole powierzchni całkowitej ostrosłupa oraz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy.

PRACA KONTROLNA nr 1 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Uprościć następujące wyrażenie, określwszy uprzednio jego dziedzinę:

$$\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} \cdot \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{1 + \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}} \right) : \frac{\sqrt[3]{b}(1 + \sqrt[3]{b}) - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Obliczyć wartość tego wyrażenia dla $a = 7 + 5\sqrt{2}$ i $b = 7 - 5\sqrt{2}$.

2. Dla jakiego rzeczywistego parametru m równanie

$$\frac{m + 1}{mx} - \frac{x}{m} = 1 + \frac{m}{x}$$

ma dwa pierwiastki będące sinusem i cosinusem kąta z przedziału $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$?

3. Dane są liczby: $m = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{7}{3}}$, $n = \frac{(\sqrt{2})^{-4} \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}} \sqrt[4]{3}}{\left(\sqrt[4]{4}\right)^5 \cdot \sqrt{32} \cdot 27^{-\frac{1}{4}}}$. Wyznaczyć k tak, by liczby

m, k, n były odpowiednio: pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego, a następnie wyznaczyć sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, którego pierwszymi trzema wyrazami są m, k, n . Ile wyrazów tego ciągu należy wziąć, by ich suma przekroczyła 95% sumy wszystkich wyrazów?

4. Podać wzór funkcji homograficznej, której wykres jest symetrycznym odbiciem wykresu funkcji $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ względem: a) prostej $x = 1$, b) punktu $(0, 0)$, c) punktu $(1, 0)$.

Odpowiedź uzasadnić, przeprowadzając odpowiednie obliczenia. Sporządzić staranne wykresy wszystkich rozważanych funkcji.

5. W czworokącie wypukłym $ABCD$, w którym $AB = 1, BC = 2, CD = 4, DA = 3$, cosinus kąta przy wierzchołku B jest równy $-\frac{5}{7}$. Wykazać, że czworokąt ten można wpisać w okrąg i obliczyć promień R tego okręgu. Sprawdzić, czy w rozważany czworokąt można wpisać okrąg. Jeżeli tak, to obliczyć jego promień.
6. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym, w którym wszystkie krawędzie są równe, poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez jedną z krawędzi podstawy oraz środki dwu przeciwległych do niej krawędzi bocznych. Obliczyć stosunek pola powierzchni przekroju do pola podstawy oraz stosunek objętości brył, na jakie płaszczyzna podzieliła ostrosłup.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **28 września 2017r.** na adres:

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>