XLVII
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

listopad 2017 r.

PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Dwaj kolarze jeżdżą po torze w kształcie okręgu ze stałymi prędkościami. Jeżeli startują z tego samego punktu i jadą w tę samą stronę, to szybszy z nich pierwszy raz ponownie zrówna się z wolniejszym, wyprzedzając go o jedno okrążenie, po przejechaniu dokładnie 7 okrążeń. Ilu okrążeń potrzebuje szybszy kolarz żeby dogonić kolegę, jeżeli startują z przeciwległych stron toru (tzn. odcinek łączący punkty ich startu jest średnicą koła)?

2. Liczby o 16% mniejsza i o 43% większa od ułamka okresowego $0,(75)$ są pierwiastkami trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych względnie pierwszych. Obliczyć resztę z dzielenia tego trójmianu przez dwumian $(x-1)$.

3. Rozwiązać równanie
$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}.$$

4. Rozwiązać nierówność
$$\frac{\log_2(10-x^2)}{\log_2(4-x)} > 2.$$

5. Dwa okręgi o promieniach r i R styczne zewnętrznie w punkcie C, są styczne do prostej k w punktach A i B. Wyznaczyć kąt $\angle ACB$ i promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

6. Dane są punkty $A(2,-2)$ i $B(8,1)$. Na paraboli $y = x^2 - x$ znaleźć taki punkt C, żeby pole trójkąta ABC było najmniejsze. Wykonać rysunek.

PRACA KONTROLNA nr 3 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Czy wieża zbudowana z sześciennych klocków o objętościach $1, 3, 9, 27$, zmieści się na półce o wysokości $\frac{15}{2}$? Odpowiedź uzasadnić nie stosując obliczeń przybliżonych.

2. Rozwiązać równanie
$$\cos 2x = (\sqrt{3} - 1)\sin x(\cos x + \sin x).$$

3. Sporządzić staranny wykres funkcji $f(x) = |2^{-|x|+1} - 1| - \dfrac{1}{2}$. Opisać sposób postępowania. Rozwiązać nierówność $f(x) > 0$.

4. Rozwiązać nierówność
$$\log_2 x + \log_2^3 x + \log_2^5 x + \ldots < \frac{20}{9}.$$

5. Pod jakim kątem przecinają się okręgi o równaniach $(x-6)^2 + y^2 = 9$, $x^2 + (y+4)^2 = 25$ (kątem miedzy dwoma okręgami nazywamy kąt między stycznymi w punkcie przecięcia)? Znaleźć równanie okręgu, którego środek leży na prostej $2x - y = 0$, i który przecina każdy z danych okręgów pod kątem prostym.

6. Boisko do gry w football amerykański ma kształt prostokąta o długości a i szerokości $b < a$. Na środku krótszych boków stoją bramki o szerokości $d < b$. Z którego miejsca linii bocznej boiska (czyli dłuższego boku prostokąta) widać bramkę pod największym możliwym kątem? Wyrazić odpowiedź za pomocą wzoru zawierającego symbole a, b, d, a następnie wykonać obliczenia dla wartości $a = 110m$, $b = 49m$, $d = 5m$.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 listopada 2016r.** na adres:


```
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW.
```


Na kopercie prosimy <u>koniecznie</u> zaznaczyć wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres internetowy Kursu: `http://www.im.pwr.wroc.pl/kurs`