XLVII
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

grudzień 2017 r.

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Rodzina składa się z pięciorga dzieci i dwojga rodziców. Załóżmy, że dzieci nie mogą wyjść na spacer ani nie mogą zostać w domu bez opieki któregokolwiek z rodziców. W ilu możliwych kombinacjach dzieci mogą wyjść na spacer zakładając, że przynajmniej jedno dziecko idzie na spacer?

2. Na bokach prostokąta o stałym obwodzie $4p$ opisano na średnicach półokręgi leżące na zewnątrz prostokąta. Dla jakich wartości boków prostokąta pole figury ograniczonej krzywą złożoną z tych czterech półokręgów jest najmniejsze? Wykonać staranny rysunek.

3. Punkty $A(1,3), B(5,1), C(4,4)$ są wierzchołkami trójkąta. Obliczyć stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

4. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania $x^2 - 3x + A = 0$, a liczby x_3, x_4 pierwiastkami równania $x^2 - 12x + B = 0$. Wiadomo, że liczby x_1, x_2, x_3, x_4 tworzą ciąg geometryczny. Znaleźć ten ciąg oraz liczby A i B.

5. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0, \\ |x-1| - y = 0, \end{cases}$$

a następnie obliczyć pole obszaru, który jest rozwiązaniem układu nierówności:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 \leqslant 0, \\ |x-1| - y \leqslant 0. \end{cases}$$

Sporządzić staranny rysunek.

6. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym okrąg styczny do dwóch boków podstawy i przechodzący przez jej wierzchołek nieleżący na żadnym z tych boków ma promień $r = 2$. Płaszczyzna przechodząca przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka graniastosłupa tworzy z płaszczyzną jego podstawy kąt $45°$. Obliczyć objętość graniastosłupa.

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Na ile sposbów można umieścić 6 osób w pokojach dwuosobowych przy założeniu, że pewne dwie ustalone osoby nie chcą mieszkać razem oraz że a) pokoje są jednakowe, a więc ważne jest kto mieszka z kim, ale nieważne w którym pokoju; b) pokoje są istotnie różne, a więc ważne jest kto mieszka w którym pokoju?

2. Rozwiązać następującą nierówność

$$\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \ldots < \cos x + 1$$

dla $x \in [0, 2\pi]$.

3. Pokazać, że dla każdej wartości parametru m wielomian

$$w(x) = x^3 + (2m-1)x^2 - (3+2m)x + 3$$

ma pierwiastek całkowity. Dla jakich wartości parametru m pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny?

4. Punkt A należy do obszaru kąta o mierze stopniowej 60. Odległości tego punktu od ramion kąta są równe a i b. Wyznaczyć odległość punktu A od wierzchołka kąta. Następnie obliczyć tę odległość dla $a = 2$ i $b = \sqrt{3} - 1$.

5. Z punktu $A(1, 1)$ wychodzą dwie półproste prostopadłe przecinające oś OX układu współrzędnych. Niech F będzie obszarem kąta prostego wyznaczonego przez te półproste, G zaś zbiorem wszystkich punktów o obydwóch współrzędnych nieujemnych. Wyznaczyć położenie półprostych, dla których pole figury $F \cap G$ jest najmniejsze.

6. Znaleźć najmniejszą możliwą objętość stożka opisanego na walcu, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku 2.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 grudnia 2017r.** na adres:

```
Wydział Matematyki
Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW.
```

Na kopercie prosimy koniecznie zaznaczyć wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres internetowy Kursu: http://www.im.pwr.edu.pl/kurs