XLVII
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

styczeń 2018 r.

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Rozwiązać równanie $3^{\log_{\sqrt{3}}(2^x-1)} = 2^{x+1} + 1$.

2. Jaki zbiór tworzą środki wszystkich cięciw przechodzących przez ustalony punkt zadanego okręgu?

3. Narysować wykres funkcji $f(x) = \dfrac{|x+2|-1}{x-1}$. Wyznaczyć zbiór jej wartości oraz najmniejszą i największą wartość na przedziale $[-3, 0]$.

4. Niech T będzie przekształceniem płaszczyzny polegającym na przesunięciu o wektor $[1, 2]$, a S – symetrią względem prostej $y = x$. Wyznaczyć (analitycznie) obrazy kwadratu o wierzchołkach $(0, 1), (1, 1), (1, 2)$ i $(0, 2)$ w przekształceniach $S \circ T$ i $T \circ S$. Sporządzić staranne rysunki.

5. Wspólne styczne do stycznych zewnętrznie okręgów o promieniach $r < R$ przecinają się pod kątem 2α. Wyznaczyć stosunek pól tych okręgów. Dla jakiego kąta α duże koło ma 9 razy większe pole niż małe?

6. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest 4 razy większe od pola jego podstawy. Obliczyć sinus kąta między ścianami ostrosłupa.

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. W rozwinięciu $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$ dla $a=\sqrt{x}$, $b=\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}$ trzy pierwsze współczynniki przy potęgach x tworzą ciąg arytmetyczny. Znaleźć wszystkie składniki rozwinięcia, w którym x występuje w potędze o wykładniku całkowitym.

2. Punkty K, L, M dzielą boki AB, BC, CA trójkąta ABC (odpowiednio) w tym samym stosunku, tzn.
$$\frac{|KB|}{|AB|} = \frac{|LC|}{|BC|} = \frac{|MA|}{|CA|} = s$$
Wykazać, że dla dowolnego punktu P znajdującego się wewnątrz trójkąta zachodzi równość
$$\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PL} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.$$

3. Narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{(x+1)^2-1}{x|x-1|}$. Wyznaczyć styczną do wykresu w punkcie $(-2, f(-2))$ oraz styczną do niej prostopadłą.

4. Końce odcinka AB o długości l poruszają się po okręgu o promieniu R $(l < 2R)$. Na odcinku obrano punkt P tak, że $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{1}{3}$. Uzasadnić, że poruszający się punkt P zakreśla okrąg o tym samym środku. Dla jakiego l wycięte w ten sposób koło ma pole dwa razy mniejsze od pola dużego koła.

5. Rozważamy zbiór wszystkich trójkątów o polu 10, których jednym z wierzchołków jest $A(5,0)$ a pozostałe dwa leżą na osi Oy. Wyznaczyć zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, które są środkami okręgów opisanych na tych trójkątach.

6. W przeciwległe narożniki sześcianu o boku 1 wpisano dwie kule o takich samych promieniach tak, że każda z nich jest styczna do drugiej i do trzech ścian wychodzących z odpowiedniego wierzchołka. Jaka jest odległość ich środków?

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 stycznia 2018r.** na adres:

`Wydział Matematyki`
`Politechnika Wrocławska`
`Wybrzeże Wyspiańskiego 27`
`50-370 WROCŁAW.`

Na kopercie prosimy <u>koniecznie</u> zaznaczyć wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

<u>Adres internetowy Kursu:</u> `http://www.im.pwr.wroc.pl/kurs`