XLVI
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

marzec 2018 r.

PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu trzeciego stopnia $w(x)$ oraz wielomianu $w(x+1)$. Środkiem symetrii wykresu $w(x)$ jest punkt $S(0,2)$. Narysować staranny wykres funkcji $f(x) = |w(x-1)|$. (Środkiem symetrii krzywej o równaniu $y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ jest punkt $S\left(\frac{-b}{3a}, y\left(\frac{-b}{3a}\right)\right)$.)

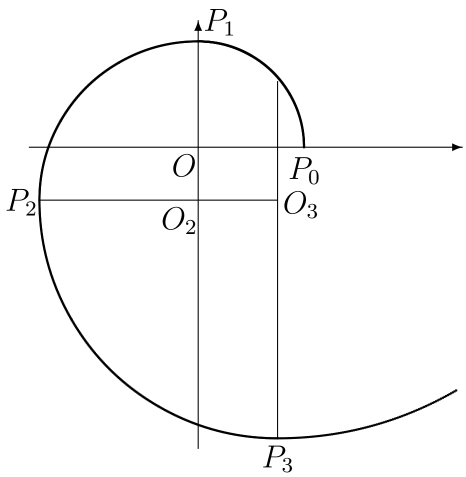
2. Sala jest oświetlona 5 żarówkami. Wkręcono losowo żarówki żółte, czerwone, zielone i niebieskie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wkręcono co najmniej dwie żarówki żółte i co najmniej dwie czerwone.

3. Rozwiązać równanie
$$\frac{\cos 5x}{\cos 3x} + 1 = 0.$$

4. Wazon w kształcie walca, którego wysokość jest większa od średnicy podstawy, ma objętość 1200 cm^3. Napełniony wodą wazon przechylono tak, że jego oś symetrii utworzyła z pionem kąt 45^o. Wylało się 200 cm^3 wody. Podać wymiary wazonu (pominąć grubość ścianek).

5. Podstawa AB trapezu równoramiennego jest średnicą okręgu opisanego na nim. Za pomocą rachunku wektorowego wyznaczyć współrzędne wierzchołków B i C, wiedząc, że $|AB| = 5$, $A(1,1)$, $D(3,2)$ oraz że B leży w dolnej półpłaszczyźnie.

6. Krzywa spiralna jest utworzona z ćwiartek okręgów, których promienie tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q > 1$. Środek pierwszego okręgu znajduje się w początku układu współrzędnych, a punkt $P_0(2,0)$ jest początkiem krzywej. Środek O_2 drugiego okręgu leży na osi Oy tak, że łuki obu okręgów łączą się w punkcie P_1 (rysunek). Środki kolejnych okręgów są tak położone, że utworzona krzywa jest gładka i promień łuku mniejszego okręgu jest częścią promienia łuku większego okręgu (rysunek). Znaleźć współrzędne środka O_6 oraz długość łuku spirali P_0P_6. Wynik podać w najprostszej postaci. Następnie wykonać obliczenia dla $q = \frac{3}{2}$.



XLVI
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

marzec 2018 r.

PRACA KONTROLNA nr 7 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Stosując zasadę indukcji matematycznej, wykazać, że dla wszystkich $n \geq 1$ liczba $10^n + 18n - 1$ jest podzielna przez 27.

2. Sprawdzić tożsamość
$$\frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$
i określić jej dziedzinę.

3. Dwóch strzelców oddało każdy po dwa strzały i okazało się, że cel został trafiony dokładnie dwa razy. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dwukrotnie trafił pierwszy strzelec, jeśli za każdym razem pierwszy trafia z prawdopodobieństwem $\frac{4}{5}$, a drugi z prawdopodobieństwem $\frac{3}{5}$.

4. Znaleźć wartość parametru nieujemnego p, dla którego suma kwadratów odwrotności pierwiastków równania
$$x^2 + (p + 1)x - (p + 3) = 0$$
jest najmniejsza.

5. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} x^2y^2 = 4 \\ y^4 - 6y^2 - x^2 + 9 = 0 \end{cases}.$$
Podać interpretację geometryczną tego układu i obliczyć pole wielokąta utworzonego przez jego rozwiązania (interpretowane jako punkty na płaszczyźnie). Sporządzić rysunek.

6. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoramienny o kącie przy wierzchołku 2α. Płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek D ostrosłupa i wysokość podstawy jest płaszczyzną symetrii ostrosłupa, a przekrój bryły tą płaszczyzną jest trójkątem równobocznym o boku a. Wykazać, że ostrosłup ma jeszcze jedną płaszczyznę symetrii i obliczyć promień kuli opisanej na nim.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do 18 marca 2018 r. na adres:

Wydział Matematyki
Politechniki Wrocławskiej,
ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27,
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy <u>koniecznie</u> zaznaczyć wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace nie spełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Adres Internetowy Kursu: `http://www.im.pwr.wroc.pl/kurs`