XLVIII
KORESPONDENCYJNY KURS
Z MATEMATYKI

styczeń 2019 r.

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Znaleźć stuelementowy ciąg arytmetyczny, w którym suma wyrazów o numerach nieparzystych jest dwa razy większa od sumy wyrazów o numerach parzystych i o 50 mniejsza od sumy wszystkich wyrazów.

2. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x^2 + 1 & = & 2^{y-1}, \\ y - 2 & = & \log_2(x+2). \end{cases}$

3. Narysować wykres funkcji $f(x) = x|x| - 4|x| + 3$ i określić liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m.

4. W romb $ABCD$ o kącie ostrym α wpisano czworokąt, którego boki są równoległe do przekątnych rombu. Jakie jest możliwie największe pole takiego czworokąta?

5. Znaleźć równania wspólnych stycznych do wykresów funkcji
$$f(x) = -x^2 + 2x \quad \text{i} \quad g(x) = x^2 + 1.$$

6. W stożek o promieniu podstawy R wpisano stożek o osiem razy mniejszej objętości. Wysokość małego stożka jest zawarta w wysokości dużego stożka, jego wierzchołek jest w środku podstawy, a okrąg ograniczający podstawę małego stożka jest zawarty w powierzchni bocznej dużego stożka. Obliczyć $\frac{r}{R}$, gdzie r oznacza promień podstawy stożka wpisanego.

PRACA KONTROLNA nr 5 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x^{\log_2 y-1} &= 16, \\ (2y)^{\log_2 x-1} &= 16 \end{cases}$

2. Wyznaczyć równania wszystkich stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, które są prostopadłe do prostej $x + 3y + 1 = 0$.

3. Granicą ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - \sqrt{n^4 - an^2 + bn}$ jest większy z pierwiastków równania
$$x^{\log_2 x} - 3 = 4x^{\log_{\frac{1}{2}} x}.$$
Wyznaczyć parametry a i b.

4. Na boku BC trójkąta równobocznego obrano punkt D tak, że promień okręgu wpisanego w trójkąt ADC jest dwa razy mniejszy niż promień okręgu wpisanego w trójkąt ABD. W jakim stosunku punkt D dzieli bok BC?

5. Rozwiązać nierówność
$$1 + \frac{\sin x}{\sqrt{3} + \sin x} + \left(\frac{\sin x}{\sqrt{3} + \sin x}\right)^2 + \left(\frac{\sin x}{\sqrt{3} + \sin x}\right)^3 + \cdots \leqslant \cos x,$$
której lewa strona jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

6. Jakie wymiary ma walec o możliwie największej objętości wpisany w sześcian o boku a w taki sposób, że jego oś jest zawarta w przekątnej sześcianu, a każda z podstaw jest styczna do trzech ścian wychodzących z jednego wierzchołka.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 stycznia 2019r.** na adres:

```
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW.
```

Na kopercie prosimy koniecznie zaznaczyć wybrany poziom! (np. poziom podstawowy lub rozszerzony). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Uwaga. Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia nam swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie zadań, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres internetowy Kursu: `http://www.im.pwr.edu.pl/kurs`