

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Pewnej mroźnej zimy trzy przeziębione krasnale kupowały w aptece lekarstwa. Pierwszego męczył straszny ból gardła. Kupił więc trzy tabletki do ssania, tabletkę na kaszel i kropelkę do nosa. Zapłacił za wszystko 4 grosze. Drugiemu dokuczał uporczywy kaszel, za tę samą cenę kupił trzy tabletki na kaszel, tabletkę do ssania i kropelkę do nosa. Trzeci miał straszny katar. Poprosił więc o trzy kropelki do nosa, o tabletkę do ssania oraz o tabletkę na kaszel. A dowiedziawszy się, że ma zapłacić 2 grosze, pomyślał chwilę, kichnął i powiedział do aptekarza: „Pomylił się Pan!” Uzasadnić, że krasnal miał rację.
2. Obliczyć, ile kolejnych dodatnich liczb naturalnych podzielnych przez 3 należy dodać do siebie, aby otrzymana suma była równa liczbie $115a^{-1}$, gdzie

$$a = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{691 \cdot 693}.$$

3. Rozwiązać równanie

$$\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \sin 2x + 2 \sin^2 x.$$

4. Rzucamy pięć razy jednorodną kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia sumy oczek większej od 20, jeśli wiadomo, że suma oczek wyrzuconych w trzech pierwszych rzutach wynosi 10.
5. W trójkąt równoramienny, którego ramiona są dwa razy dłuższe od podstawy, wpisano prostokąt w taki sposób, że jeden z boków prostokąta zawarty jest w podstawie trójkąta. Jakie powinny być wymiary tego prostokąta, aby jego pole było największe? Wyznaczyć wartość tego największego pola.
6. Narysować w prostokątnym układzie współrzędnych wykresy funkcji

$$f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = f(|x| - 1) + 1.$$

Rozwiązać nierówność $g(x) \geq f(x)$ i zaznaczyć zbiór jej rozwiązań na osi liczbowej.

PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Ojciec i syn obchodzą urodziny tego samego dnia. W roku 2019 podczas uroczystości urodzin zapytano jubilatów, ile mają lat. Ojciec odpowiedział: „Jeśli wiek mego syna przemnożę przez swój wiek za 31 lat, to otrzymam rok swego urodzenia”. Syn dodał: „A ja otrzymam rok swego urodzenia, jeśli wiek mego ojca sprzed 16 lat przemnożę przez swój wiek za 33 lata”. W którym roku urodził się każdy z jubilatów?
2. Wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji

$$f(x) = \log(3^{3x-1} - 3^{2x-1} - 3^{x+1} + 3).$$

3. Rozwiązać równanie

$$4 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \sin 4x.$$

4. W dwóch urnach znajdują się kule białe i czarne, przy czym w pierwszej urnie są 4 kule białe i 6 czarnych, a w drugiej jest 7 kul białych i 3 czarne. Rzucamy dwa razy jedną kostką do gry. Jeśli suma wyrzuconych oczek jest mniejsza niż 6, losujemy dwie kule z pierwszej urny. Jeśli suma wyrzuconych oczek jest większa niż 9, losujemy dwie kule z drugiej urny. W pozostałych przypadkach losujemy po jednej kuli z każdej urny. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych.
5. Uzasadnić, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5. Czy prawdą jest, że jest ona też podzielna przez 30?
6. W trójkąt równoramienny, którego ramiona są długości a , a miara kąta zawartego pomiędzy nimi wynosi α , wpisano prostokąt w taki sposób, że jeden z boków prostokąta zawarty jest w jednym z ramion trójkąta. Jakie powinny być wymiary tego prostokąta, aby jego pole było największe? Wyznaczyć wartość tego największego pola.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 stycznia 2019r.** na adres:

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Uwaga. Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia nam swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie zadań, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>