

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM PODSTAWOWY

1. Rozwiązać nierówność $\sqrt{2^x - 1} \leq 2^x - 3$.
2. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b obracamy wokół każdej z przyprostokątnych. Obliczyć stosunek sumy objętości tych stożków do objętości bryły otrzymanej przez obrót trójkąta wokół przeciwprostokątnej i wyrazić go jako funkcję zmiennej $\frac{a}{b}$.
3. Punkty $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ są trzema kolejnymi wierzchołkami wielokąta foremnego. Wyznaczyć współrzędne pozostałych wierzchołków wielokąta oraz jego pole. Podać równania okręgów wpisanego i opisanego na tym wielokącie oraz wyznaczyć stosunek ich promieni.
4. Niech $f(x) = \begin{cases} \frac{2-|x|}{|x|-1} & \text{gdym } |x| > \frac{3}{2}. \\ \frac{8}{9}x^2 - 1 & \text{gdym } |x| \leq \frac{3}{2}. \end{cases}$
 - a) Narysować wykres funkcji f i na jego podstawie wyznaczyć zbiór wartości funkcji.
 - b) Obliczyć $f(\sqrt{2})$ oraz $f(\sqrt{3})$.
 - c) Rozwiązać nierówność $f(x) \leq -\frac{1}{2}$ i zaznaczyć na osi $0x$ zbiór rozwiązań.
5. Punkty $A(0, 1)$, $B(4, 3)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a $S(2, 3)$ punktem przecięcia przekątnych. Posługując się rachunkiem wektorowym, wyznaczyć pozostałe wierzchołki równoległoboku oraz wierzchołki równoległoboku otrzymanego przez obrót $ABCD$ wokół punktu A o 90° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.
6. Ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym bok podstawy i wysokość są równe a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jedną z krawędzi podstawy na dwie bryły o tej samej objętości. Wyznaczyć tangens kąta nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy. Sporządzić rysunek.

PRACA KONTROLNA nr 4 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Punkty $A(0, 1)$, $B(4, 3)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a $S(2, 3)$ punktem przecięcia przekątnych. Posługując się rachunkiem wektorowym, wyznaczyć pozostałe wierzchołki równoległoboku oraz wierzchołki równoległoboku $A'B'C'D'$ otrzymanego przez obrót $ABCD$ o kąt 90° wokół punktu $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Sprawdzić, że $A'B'C'D'$ jest obrazem $ABCD$ w przekształceniu $T_2 \circ O \circ T_1$, gdzie T_1 jest przesunięciem o wektor $[0, 1]$, O - obrotem o kąt 90° wokół punktu $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a T_2 - przesunięciem o wektor $[1, 0]$.

2. Narysować wykres funkcji

$$f(x) = 1 - \frac{2^x}{3^x - 2^x} + \left(\frac{2^x}{3^x - 2^x} \right)^2 - \dots$$

i uzasadnić, że przyjmuje ona wyłącznie wartości większe niż $\frac{1}{2}$.

3. Niech $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1| & \text{dla } x \leq 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) & \text{dla } x > 1. \end{cases}$

a) Narysować wykres funkcji f i na jego podstawie wyznaczyć zbiór wartości funkcji.

b) Obliczyć $f \left(\log_{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) \right)$ oraz $f \left(2^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right)$.

c) Rozwiązać nierówność $f(x) \leq \frac{1}{2}$ i zaznaczyć na osi $0x$ zbiór rozwiązań.

4. Punkt $C(0, 0)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego, w którym środkowa podstawy AB i wysokość poprowadzona z jednego z wierzchołków A, B przecinają się w punkcie $S(2, 1)$. Pole trójkąta ABS jest dwa razy mniejsze niż pole trójkąta ABC . Wyznaczyć współrzędne wierzchołków A, B oraz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

5. W ośmiościan foremny wpisano dwa sześciany. Wierzchołki pierwszego z nich leżą na krawędziach ośmiościanu, a wierzchołki drugiego - na wysokościach ścian bocznych. Obliczyć stosunek objętości tych sześciątów.

6. Prostokąt o bokach a i $2a$ obraca się wokół przekątnej. Obliczyć pole powierzchni całkowitej i objętość otrzymanej bryły.

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **18 grudnia 2019r.** na adres:

Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 WROCŁAW.

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do wagi listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

Uwaga. Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia Politechnice Wrocławskiej swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie zadań, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>