

**PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM PODSTAWOWY**

1. W urnie znajduje się 9 kul ponumerowanych od 1 do 9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losując bez zwracania 4 kule, otrzymamy parzystą sumę wylosowanych numerów?

2. Rozwiąż równanie

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x),$$

3. Rozwiąż układ równań 
$$\begin{cases} 2x - 1 &= 2^{y-1}, \\ \log_2(x^2 - 4) &= y - 1 \end{cases}$$

4. Niech  $A = \{(x, y) : -1 \leq \log_{\frac{1}{2}} |x| + \log_2 |y| \leq 1\}$ ,  $B = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 2\}$ . Narysuj zbiór  $A \cap B$  oblicz stosunek jego pola do pola zbioru  $B \setminus A$ .

5. Narysuj wykres funkcji  $f(x) = (\sqrt{2})^{\log_2(2x-1)^2 + 4 \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2-x}}$ . Określ liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$  w zależności od parametru  $m$  i rozwiąż równanie  $f(x) = 1$ .

6. W trójkąt równoramienny wpisano okrąg o promieniu  $r$ . Oblicz pole trójkąta, jeżeli wiadomo, że że środek okręgu na nim opisanego leży na okręgu wpisanym.

## PRACA KONTROLNA nr 6 - POZIOM ROZSZERZONY

1. Kuba umie odpowiedzieć na 80% pytań przygotowanych przez wykładowcę na egzamin z algebry liniowej. Na egzaminie losuje 2 spośród 60 pytań. Jeżeli odpowie poprawnie na oba, to egzamin ma zdany, jeżeli na żadne, to musi przystąpić do egzaminu poprawkowego. Jeżeli zaś odpowie poprawnie na jedno z pytań, to może na tym samym egzaminie wylosować jeszcze jedno (z pozostałych 58 pytań) i poprawna na nie odpowiedź jest podstawą zaliczenia przedmiotu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Kuba zaliczy ten przedmiot podczas pierwszego egzaminu?

2. Rozwiąż równanie

$$9^{x-\sqrt{x^2-1}} - 12 \cdot 3^{x-1-\sqrt{x^2-1}} + 3 = 0.$$

3. Rozwiąż równanie logarytmiczne  $\log_{(x+2)^2} |x-2| = \log_{|x-2|} \sqrt{x+2}$ .

4. Narysuj zbiór  $\{(x, y) : 3 \leq |x| + |y| \leq 11, |y| \leq 2^{|x|}, |y| \geq \log_2 |x|\}$  i podaj równania jego osi symetrii. Uzasadnij sposób postępowania.

5. Rozwiąż nierówność

$$1 + \frac{\cos x}{\sqrt{3} + \cos x} + \left(\frac{\cos x}{\sqrt{3} + \cos x}\right)^2 + \left(\frac{\cos x}{\sqrt{3} + \cos x}\right)^3 + \dots \leq \sin x.$$

której lewa strona jest sumą nieskończonego szeregu geometrycznego.

6. Punkt  $S$  jest środkiem boku  $AB$  w trójkącie  $ABC$ . Ponadto  $\angle BAC + \angle SCB = 90^\circ$  oraz  $|AC| < |BC|$ . Niech  $D$  będzie punktem przecięcia symetralnej  $AB$  z prostą  $AC$ . Udowodnij, że wyjściowy trójkąt jest prostokątny, a na czworokącie  $SBDC$  można opisać okrąg.

---

Rozwiązania (rękopis) zadań z wybranego poziomu prosimy nadsyłać do **20.02.2025r.** na adres:

Wydział Matematyki  
Politechnika Wrocławska  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27  
50-370 WROCŁAW,

lub **elektronicznie**, za pośrednictwem portalu [talent.pwr.edu.pl](http://talent.pwr.edu.pl)

Na kopercie prosimy **koniecznie** zaznaczyć **wybrany poziom!** (np. **poziom podstawowy lub rozszerzony**). Do rozwiązań należy dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę zwrotną z naklejonym znaczkiem, odpowiednim do formatu listu. Prace niespełniające podanych warunków nie będą poprawiane ani odsyłane.

**Uwaga.** Wysyłając nam rozwiązania zadań uczestnik Kursu udostępnia Politechnice Wrocławskiej swoje **dane osobowe**, które przetwarzamy **wyłącznie** w zakresie niezbędnym do jego prowadzenia (odesłanie zadań, prowadzenie statystyki). Szczegółowe informacje o przetwarzaniu przez nas danych osobowych są dostępne na stronie internetowej Kursu.

Adres internetowy Kursu: <http://www.im.pwr.edu.pl/kurs>